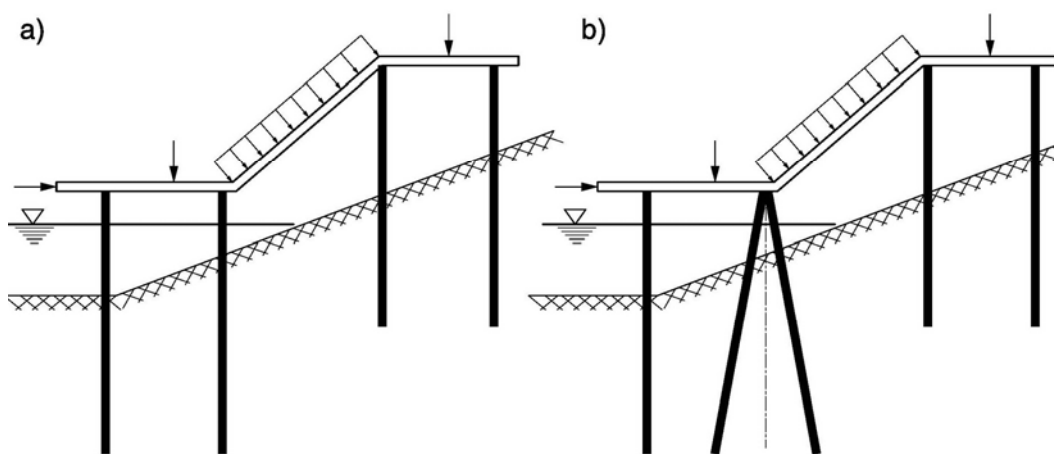


TÍNH TOÁN CÔNG TRÌNH BẾN TRÊN NỀN CỌC THEO SƠ ĐỒ KHUNG PHẪNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN CHUYỂN TIẾP

TS. Phan Dũng

1. Giới thiệu

- 1.1. Công trình bến (CTB) trên nền cọc là loại kết cấu được sử dụng phổ biến nhất ở nước ta và cũng là một trong những bài toán được nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Những nét chính về quá trình phát triển các phương pháp tính thuộc lĩnh vực này có thể tìm thấy trong [3] và [7].
- 1.2. Đối tượng nghiên cứu ở đây vẫn là CTB trên nền cọc loại hờ theo hai sơ đồ kết cấu: nền cọc với tất cả các cọc thẳng đứng (H.1a) và nền cọc có một hay nhiều gối cọc chéo (H.1b). Lời giải Ma trận chuyển tiếp sẽ được thực hiện trên hai sơ đồ tính toán: khung phẳng có các trụ tương đương và khung phẳng có các trụ cọc trong đất. Chi tiết về những khái niệm này xin xem ở [4] và [5].
- 1.3. Mấy mươi năm về trước, phương pháp Ma trận chuyển tiếp đã được dùng để tính toán CTB trên nền cọc [2], [3] và cũng đã tỏ rõ những thế mạnh có sức thuyết phục. Tuy vậy vẫn còn những điểm chưa thể bằng lòng, như:
 1. Thuật toán ma trận đường như thiên về cách tính “tay”, chưa hợp lý.
 2. Chưa xét ảnh hưởng lực dọc đến trạng thái chịu uốn của các bộ phận kết cấu CTB; đặc biệt là nền cọc.
 3. Và cũng vì những lẽ đó mà đến thời điểm này chưa thực hiện khảo sát một cách hệ thống sự làm việc đặc trưng của các CTB theo hai sơ đồ kết cấu và hai sơ đồ tính toán như đã làm trong [4] và [5] (bằng phương pháp phần tử hữu hạn).



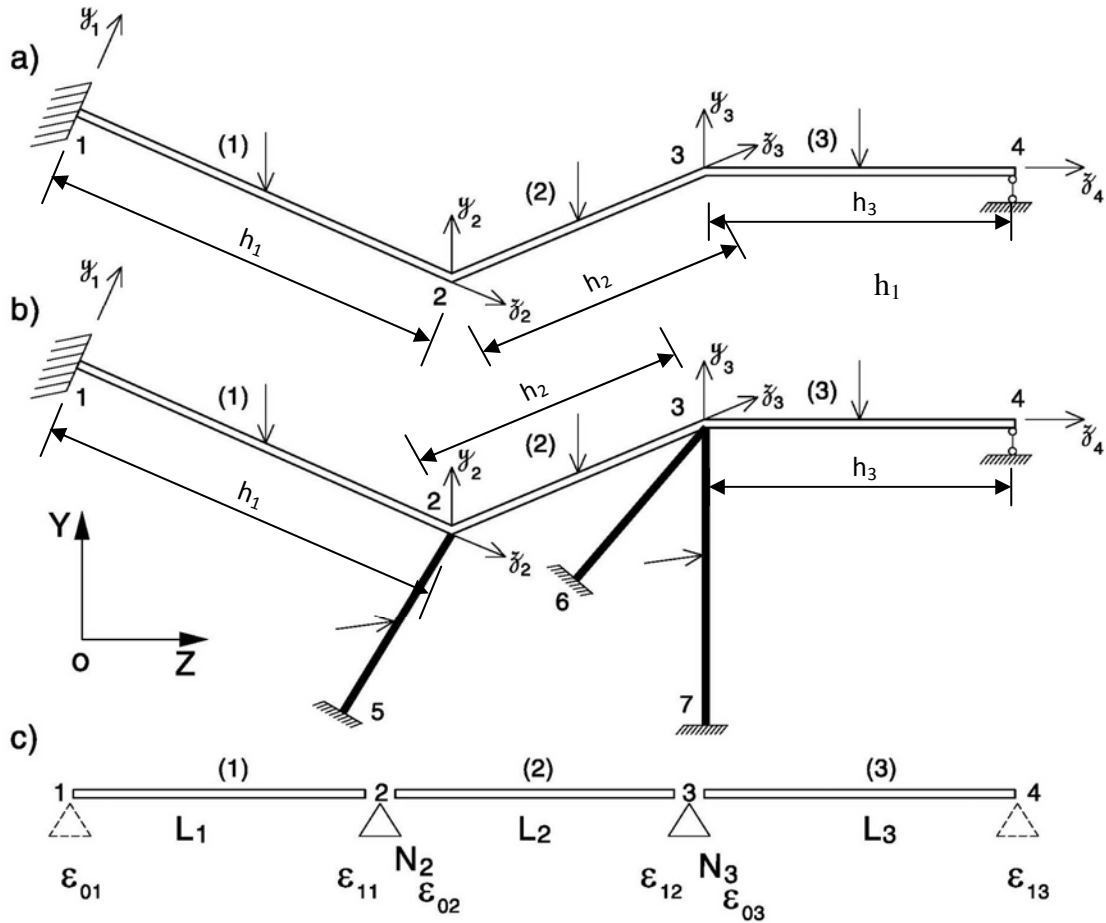
Hình 1: Sơ kết cấu công trình bến trên nền cọc
a. Với các cọc thẳng đứng;
b. Có gối cọc chéo.

Do vậy, mục tiêu của bài viết này là giới thiệu kết quả ứng dụng giải thuật Ma trận chuyển tiếp để đánh giá mức độ ảnh hưởng của lực dọc trục cọc đến trạng thái chuyển vị-nội lực của CTB trên nền cọc.

2. Tóm tắt nội dung của phương pháp ma trận chuyển tiếp đối với khung phẳng

2.1. Những khái niệm cơ bản:

Những khái niệm cơ bản về cách ứng dụng Ma trận chuyển tiếp để tính hệ thanh phẳng được trình bày vắn tắt ở đây chủ yếu dựa vào [1].



Hình 2: Các sơ đồ mô tả nội dung cơ bản của phương pháp ma trận đối với khung phẳng

a-Sơ đồ khung không nhánh

b-Sơ đồ khung có nhánh

c-Sơ đồ mô tả cách chuyển tiếp các ma trận trạng thái trên tuyến chính.

1. Phân loại khung phẳng, thủ tục ban đầu: khung phẳng được chia thành hai loại: không nhánh (H.2a) và có nhánh (H.2b).

Đối với khung phẳng không nhánh, các vector trạng thái được chuyển tiếp trên tuyến khung, trùng với tuyến chính. Ở khung phẳng có nhánh ta phải quy đổi về khung không nhánh tương đương rồi mới thực hiện việc chuyển tiếp các vector trạng thái trên tuyến chính. Trong mỗi bài toán cụ thể, có thể có nhiều phương án tuyến chính, do vậy cần phải chọn một tuyến chính hợp lý.

Toàn bộ kết cấu khung được đặt trong một hệ tọa độ chung YOZ còn từng nhịp thanh trên tuyến chính gắn với hệ tọa độ địa phương yoz. Trên hình 2 cũng mô tả cách đánh số thứ tự nhịp và nút. Nút 1: nút đầu mút trái; nút 4: nút cuối mút phải của tuyến chính; các nút 2 và 3 gọi là nút trung gian (xin không trình bày quy ước dấu).

2. Chuyển trạng thái qua nhịp:

Vectơ trạng thái tại hai tiết diện đầu mút thanh thứ i là 0 và 1 trong hệ tọa độ địa phương có dạng:

$$\varepsilon_{oi} = \{u_{yoi} \quad u_{zoi} \quad \varphi_{xoi} \quad M_{xoi} \quad Q_{yoi} \quad N_{zoi} \quad 1\} \quad (1)$$

$$\varepsilon_{li} = \{u_{yli} \quad u_{zli} \quad \varphi_{xli} \quad M_{xli} \quad Q_{yli} \quad N_{zli} \quad 1\} \quad (2)$$

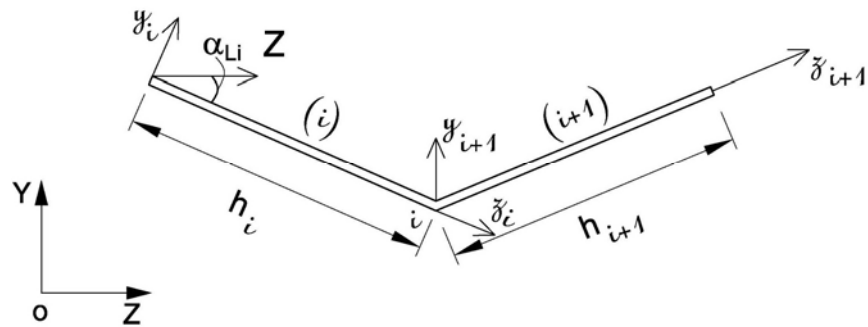
Mối quan hệ giữa chúng được biểu diễn thông qua Ma trận chuyển nhịp L_i cũng trong hệ tọa độ địa phương (xem trong [6]):

$$\varepsilon_{li} = L_i \varepsilon_{oi} \quad (3)$$

3. Chuyển trạng thái qua nút trung gian:

Nút thứ i được hiểu như là “một điểm” đặc biệt trên tuyến chính, nối giữa thanh i với thanh $i+1$, được tạo thành từ một, hai hoặc cả ba điều kiện sau:

- Do các thanh nằm ngoài tuyến chính quy tụ vào nút, chịu tải bất kỳ, được gọi là nhánh sẽ thảo luận riêng ở mục 2.2.
- Do các thanh trên tuyến chính quy tụ vào nút i đối hướng như mô tả trên hình 3.



Hình 3: Trường hợp các thanh quy tụ vào nút đối hướng

Tại đầu nút phải của thanh i , vectơ trạng thái trong hệ tọa độ địa phương ε_{li} và vectơ trạng thái trong hệ tọa độ chung ε_{li}^* có quan hệ sau:

$$\varepsilon_{li}^* = H_{Li} \varepsilon_{li} \quad (4)$$

Ở đây: H_{Li} là ma trận cosin chỉ phương dạng khối chéo, có cấu trúc:

$$H_{Li} = [\Lambda_i \quad 1 \quad 1 \quad \Lambda_i \quad 1] \quad (5)$$

Với:

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{Li} & \sin \alpha_{Li} \\ -\sin \alpha_{Li} & \cos \alpha_{Li} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Khi đó, vector trạng thái trong hệ tọa độ địa phương tại đầu nút trái thanh $i+1$ là sẽ bằng:

$$\varepsilon_{o(i+1)} = H_{L,i+1}^T \varepsilon_{li}^* \quad (7)$$

c. Do có sự thay đổi về các nguyên nhân tác dụng và điều kiện liên kết tại điểm i .

Mối quan hệ giữa vector trạng thái tại tiết diện phía trái của nút ε_{li}^* với vector trạng thái tại tiết diện phía phải cũng của nút này $\varepsilon_{o(i+1)}^*$ trong hệ tọa độ chung như sau:

$$\varepsilon_{o(i+1)}^* = N_i \varepsilon_{li}^* \quad (8)$$

Trong đó: N_i gọi là ma trận chuyển nút, có nhiệm vụ thực hiện biến đổi tuyến tính vector trạng thái ε_{li}^* thành vector trạng thái $\varepsilon_{o(i+1)}^*$. Dựa vào bảng 6-3 trong [1] có thể thiết lập ma trận này trong hệ tọa độ chung.

4. Chuyển tiếp trạng thái qua toàn bộ tuyến chính:

Ta sẽ thực hiện việc chuyển tiếp trạng thái qua toàn bộ tuyến chính của khung đã cho trên hình 2a theo sơ đồ hình 2c và ghi vào bảng 1.

Bảng 1: Công thức chuyển tiếp của các vector trạng thái

Số thứ tự dòng	Chuyển tiếp các vec tơ trạng thái theo sơ đồ H.2c.	
	Hệ tọa độ địa phương	Hệ tọa độ chung
1	ε_{01} Ⓣ	
2	$\varepsilon_{11} = L_1 \varepsilon_{01}$	$\varepsilon_{11}^* = H_{L1} L_1 \varepsilon_{01}$ Ⓢ
3	$\varepsilon_{02} = H_{L2}^T N_2 H_{L1} L_1 \varepsilon_{01}$ Ⓣ	$\varepsilon_{02}^* = N_2 H_{L1} L_1 \varepsilon_{01}$
4	$\varepsilon_{12} = L_2 H_{L2}^T N_2 H_{L1} L_1 \varepsilon_{01}$	$\varepsilon_{12}^* = H_{L2} L_2 H_{L2}^T N_2 H_{L1} L_1 \varepsilon_{01}$ Ⓣ
5	$\varepsilon_{03} = H_{L3}^T N_3 H_{L2} L_2 H_{L2}^T N_2 H_{L1} L_1 \varepsilon_{01}$ Ⓣ	$\varepsilon_{03}^* = N_3 H_{L2} L_2 H_{L2}^T N_2 H_{L1} L_1 \varepsilon_{01}$
6	$\varepsilon_{13} = L_3 H_{L3}^T N_3 H_{L2} L_2 H_{L2}^T N_2 H_{L1} L_1 \varepsilon_{01}$	Ghi chú: con số trong vòng tròn là số thứ tự của công thức được dùng

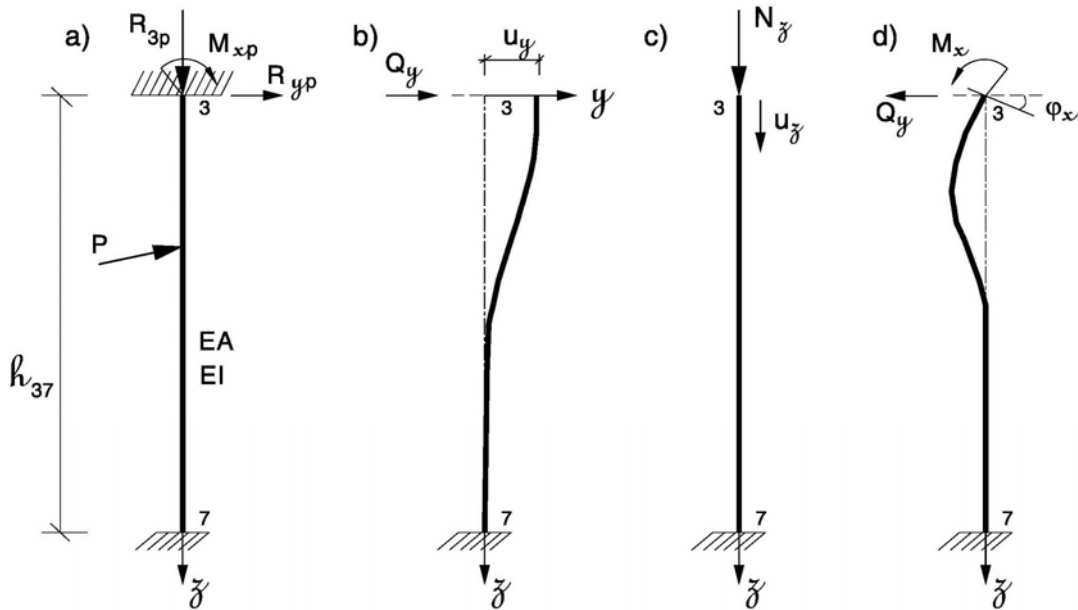
Từ kết quả này ta suy ra công thức chuyển tiếp các vector trạng thái tổng quát đối với khung có tuyến chính n nhịp với $n-1$ nút trung gian:

$$\varepsilon_{1n} = L_n H_{Ln}^T N_n H_{L,n-1} L_{n-1} \dots L_3 H_{L3}^T N_3 H_{L2} L_2 H_{L2}^T N_2 H_{L1} L_1 \varepsilon_{01} \quad (9)$$

2.2. Trường hợp khung có nhánh:

- Để trình bày vấn đề này ta sử dụng lại hình 2b: cấu kiện 25 là nhánh tại nút 2, còn các cấu kiện 36 và 37 là các nhánh tại nút 3, thuộc tuyến chính 1, 2, 3, 4. Trên các nhánh có thể chịu tác dụng của tải trọng ngoài bất kỳ. Ta sẽ xét nhánh 37, tham gia vào sự làm việc của tuyến chính tại nút 3, như mô tả ở hình 4, tại đó:

- Các thành phần chuyển vị: liên tục,
- Các thành phần nội lực: gián đoạn (có số gia).



Hình 4: Các sơ đồ tính toán của nhánh 37.

Ảnh hưởng của nhánh đến trạng thái chuyển vị- nội lực của tuyến chính được xét nhờ Ma trận nút mở rộng, ký hiệu N_{nh} được lập trong hệ tọa độ chung.

- Khi trên nhánh có ngoại lực P (hình 4a):

Thanh 37 bị ngàm hai đầu, chịu lực P, thì tại 3 sẽ xuất hiện các phản lực: M_{xp} , R_{yp} và R_{zp} chúng gây ra sự gián đoạn về lực tại nút 3 trên tuyến chính bởi các số gia với chiều ngược lại:

$$\Delta M_{xp} = -M_{xp}$$

$$\Delta R_{yp} = -R_{yp}$$

$$\Delta R_{zp} = -R_{zp}$$

Gọi ΔR_{nh} là ma trận biểu thị số gia nội lực do tải trọng ngoài P tác dụng trên nhánh gây ra đối với tuyến chính trong hệ tọa độ địa phương của nhánh này:

$$\Delta R_{nh} = \left\{ -M_{xp} \quad -R_{yp} \quad -R_{zp} \right\} \quad (10)$$

3. Như mô tả ở hình 4b, c và d, tại đầu 3 của nhánh chịu các chuyển vị cưỡng bức thành phần trong hệ tọa độ địa phương, viết dưới dạng ma trận:

$$U = \{u_y \quad u_z \quad \varphi_x\} \quad (11)$$

Các chuyển vị này gây ra phản lực tại đầu nhánh cũng với dấu ngược lại, trong hệ tọa độ địa phương của nó:

$$\left. \begin{aligned} \Delta M_x &= \frac{6EI}{h^2}u_y - \frac{4EI}{h}\varphi_x \\ \Delta Q_y &= -\frac{12EI}{h^3}u_y - \frac{6EI}{h^2}\varphi_x \\ \Delta N_z &= -\frac{EA}{h}u_z \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Gọi ΔS là ma trận số gia nội lực tại nút 3 trên tuyến chính thì từ (12), có chú ý đến (11) ta nhận được:

$$\Delta S = \{\Delta M_x \quad \Delta Q_y \quad \Delta N_z\} = \Delta S_{nh} U \quad (13)$$

Ở đây: ΔS_{nh} là ma trận độ cứng chống chuyển vị của đầu nhánh, có dạng quen thuộc trong hệ tọa độ địa phương:

$$\Delta S_{nh} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{h^2} & 0 & -\frac{4EI}{h} \\ -\frac{12EI}{h^3} & 0 & \frac{6EI}{h^2} \\ 0 & -\frac{EA}{h} & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

4. Vì các ma trận chuyển nút N_i trong (9) được viết trong hệ tọa độ chung nên các ma trận gia số ΔR_{nh} và ΔS_{nh} tại các công thức (10) và (14) tương ứng cần phải chuyển về hệ tọa độ này nhờ ma trận cosin chỉ phương H_{nh} . Muốn thế ta phải dựa vào (5) để biến đổi cấu trúc H_{Li} thành hai ma trận khối chéo $H_{nh,U}$ liên quan đến chuyển vị và $H_{nh,S}$ liên quan đến gia số nội lực:

$$H_{nh} = [H_{nh,U} \quad H_{nh,S}] \quad (15)$$

với:

$$H_{nh,U} = [\Lambda_i \quad 1] \quad (16)$$

$$H_{nh,S} = [1 \quad \Lambda_i] \quad (17)$$

Khi đó ta nhận được các công thức sau:

$$\Delta R_{nh}^* = H_{nh,S} \Delta R_{nh} \quad (18)$$

$$\Delta S_{nh}^* = H_{nh,S} \Delta S_{nh} H_{nh,U}^T \quad (19)$$

5. Cuối cùng, ma trận chuyển nút mở rộng N_{nh} trong hệ tọa độ chung dưới dạng ma trận khối sẽ là:

$$N_{nh} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Trong đó: $N_{11} = N_{22} = E$, ma trận vuông $[3 \times 3]$;
 $N_{12} = O$, ma trận vuông $[3 \times 3]$;
 $N_{13} = O$, ma trận cột $[3 \times 1]$;
 $N_{21} = \Delta S_{nh}^*$, ma trận vuông $[3 \times 3]$;
 $N_{23} = \Delta R_{nh}^*$, ma trận cột $[3 \times 1]$;
 $N_{31} = N_{32} = O$, ma trận dòng $[1 \times 3]$;
 $N_{33} = 1$, ma trận một phần tử.

Ghi chú: Nếu tại một nút có nhiều nhánh quy tụ vào thì tính ΔR_{nh}^* theo (18) và ΔS_{nh}^* theo (19) cho từng nhánh, sau đó lấy tổng đại số để có được N_{21} và N_{23} cho toàn nút.

2.3. Xác định các thông ẩn số ban đầu:

Như đã nói, Ma trận chuyển tiếp, về thực chất là dạng ma trận của phương pháp Thông số ban đầu. Vì vậy, xác định giá trị của các thông ẩn số ban đầu là nội dung cốt lõi. Về nguyên tắc, trình tự các bước tính toán nêu trong [6] vẫn đúng đối với trường hợp khung phẳng nếu chú ý một số đặc điểm sau:

1. Ma trận tích ảnh hưởng tổng thể W_n trong hệ tọa độ địa phương, được rút ra từ (9):

$$W_n = L_n H_{Ln}^T N_n N_{nh,n} H_{L,n-1} L_{n-1} \dots L_3 H_{L3}^T N_3 N_{nh,3} H_{L2} L_2 H_{L2}^T N_2 N_{nh,2} H_{L1} L_1 N_1 \quad (21)$$

2. Ma trận tuyến điều kiện T_1 phụ thuộc vào điều kiện liên kết ở nút cuối (nút thứ $n+1$) trên tuyến chính. Ba thông số đã biết tại nút này quyết định cấu trúc của T_1 $[3 \times 7]$ và tính:

$$W_n^* = T_1 W_n \quad (22)$$

3. Ma trận tuyến các thông ẩn số T_2 phụ thuộc vào điều kiện liên kết ở nút đầu tiên của tuyến chính. Ba thông ẩn số cần tìm tại nút này quyết định cấu trúc T_2 $[3 \times 7]$, giúp giữ lại ba cột ứng với ba thông ẩn số từ ma trận W_n^* $[3 \times 7]$:

$$K = W_n^* T_2 \quad (23)$$

Như thế, K là ma trận vuông cấp $[3 \times 3]$.

4. Nếu ký hiệu $\bar{\varepsilon}_{01}$ là vec tơ trạng thái đã biết tại nút đầu tiên của tuyến chính, ta lập ma trận tuyến các số hạng tự do T_3 ứng với ma trận K và tìm ma trận-cột chứa các số hạng tự do:

$$W_0 = W_n^* T_3 \bar{\varepsilon}_{01} \quad (24)$$

$$\text{với } T_3 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

5. Vec tơ trạng thái chứa các thông ẩn số ban đầu cần tìm $\bar{\varepsilon}_{01}$ sẽ được xác định bởi:

$$\bar{\varepsilon}_{01} = K^{-1} W_0 \quad (26)$$

6. Phối hợp $\bar{\varepsilon}_{01}$ và $\bar{\varepsilon}_{01}$ ta được vec tơ trạng thái chứa đầy đủ các thông số ban đầu ε_{01} tại nút đầu của tuyến chính. Trạng thái chuyển vị – nội lực của tuyến chính sẽ được xác định nhờ dạng các công thức ghi ở bảng 1.

3. Đặc điểm ứng dụng Phương pháp ma trận chuyển tiếp để tính toán công trình bển trên nền cọc:

3.1. Tổng quát:

- CTB trên nền cọc được xét ở đây xuất phát từ hai sơ đồ kết cấu, đối với mỗi sơ đồ kết cấu sẽ xây dựng lời giải theo hai sơ đồ tính toán:
 - Khung phẳng với trụ tương đương;
 - Khung phẳng với trụ cọc trong đất.
- Ứng dụng Ma trận chuyển tiếp vào các sơ đồ tính toán dạng khung phẳng như thế đối với các CTB trên nền cọc thông thường thì dầm ngang (bệ) sẽ là tuyến chính còn các cọc là các nhánh.
- Trên thực tế, phần lớn kết cấu CTB trên nền cọc kiểu hở dẫn đến điều kiện liên kết (điều kiện biên) tại tiết diện đầu nút trái và đầu nút phải của tuyến chính là tự do. Khi đó, vec tơ trạng thái ε_{01} theo (1) tại đầu nút trái của tuyến chính có:

$$\text{➤ Ba thông ẩn số, viết dạng vectơ trạng thái: } \bar{\varepsilon}_{01} = \{u_{y01} \quad u_{z01} \quad \varphi_{x01}\}$$

$$\text{➤ Ba thông số đã biết, viết dạng vectơ trạng thái: } \bar{\varepsilon}_{01} = \{M_{x01} \quad Q_{y01} \quad N_{z01}\}$$

Vec tơ trạng thái ε_{1n} nằm ở vế trái của (9) tại đầu nút phải của tuyến chính có ba thông số đã biết: M_{x1n} , Q_{y1n} và N_{z1n} .

Những thông tin này quyết định cấu trúc và giá trị các phần tử của ma trận tuyến T_1 , T_2 .

3.2. Ma trận chuyển nhip:

Ma trận chuyển nhip là một ma trận vuông cấp $[7 \times 7]$ được phân thành hai loại theo trường hợp chịu uốn:

- Khi dầm ngang (bệ) chịu uốn ngang: Ma trận chuyển nhip dùng công thức (10) trong [6] với giá trị các phần tử của cột cuối cùng được tính theo công thức bảng 6.2 của [1].

2. Nếu dầm ngang (bê) chịu uốn ngang-dọc: các thông thức (11) và (12) trong [6] là Ma trận chuyển nhịp đối với trường hợp này với chú ý rằng cách xác định phần tử của cột cuối cùng phải xem ở tài liệu tham khảo số ba trong [6].

3.3. Ma trận chuyển nút:

1. Đối với sơ đồ tính toán là khung với trụ cọc tương đương

Trong trường hợp này, mỗi cọc tương đương sẽ là một nhánh, được tính toán theo các sơ đồ hình 4, như là một thanh hai đầu ngàm có chiều dài h bằng “chiều dài chịu nén” của cọc L_N khi chịu lực dọc trục và bằng “chiều dài chịu uốn” của cọc L_u khi chịu lực ngang.

Cách xác định chiều dài chịu uốn có xét ảnh hưởng lực dọc trục đã trình bày ở Bài toán thứ ba trong [6] bằng phương pháp Ma trận chuyển tiếp khi cọc chịu lực ngang được chuyển về sơ đồ dầm - nền. Kết quả của bài toán này là tham số đầu vào quan trọng nhất để tính móng cọc theo sơ đồ khung có trụ tương đương.

Ma trận số gia nội lực ΔR_{nh} theo công thức (10) phụ thuộc vào trường hợp chịu uốn, có thể dùng các chỉ dẫn về cách xác định phần tử cột cuối cùng của ma trận chuyển nhịp.

Ma trận số gia ΔS_{nh} từ (14) sẽ có dạng:

$$\Delta S_{nh} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L_u^2} & 0 & -\frac{4EI}{L_u} \\ -\frac{12EI}{L_u^3} & 0 & \frac{6EI}{L_u^2} \\ 0 & -\frac{EA}{L_N} & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

2. Đối với sơ đồ tính toán là khung với trụ cọc trong đất:

Ở trường hợp này, mỗi một cọc thực có đầu ngàm vào bê, chịu tải bất kì trên phần chiều cao tự do của nó là một nhánh khi chịu lực ngang còn khi chịu lực dọc trục vẫn phải sử dụng chiều dài chịu nén L_N .

Lúc này, ảnh hưởng của nhánh đến trạng thái chuyển vị - nội lực của tuyến chính chỉ cần được biểu thị qua độ cứng chống chuyển vị của đầu cọc ΔS_{nh} là đủ.

Cách xác định độ cứng chống chuyển vị ngang và chuyển vị xoay đầu cọc có xét ảnh hưởng lực dọc trục đã trình bày ở Bài toán thứ hai trong [6] dựa trên phương pháp Ma trận chuyển tiếp khi cọc chịu lực ngang được chuyển về sơ đồ dầm - nền. Bộ số liệu độ cứng chống chuyển vị M_u , Q_u , M_φ và Q_φ tại đầu cọc sẽ là các tham số xuất phát quan trọng nhất khi tính móng cọc theo sơ đồ khung có trụ cọc trong đất.

Như vậy, ta không phải tính ma trận số gia nội lực ΔR_{nh} mà chỉ cần xác định ma trận số gia ΔS_{nh} từ (14) với dạng sau:

$$\Delta S_{nh} = \begin{bmatrix} M_u & 0 & -M_\varphi \\ -Q_u & 0 & Q_\varphi \\ 0 & -\frac{EA}{L_N} & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

3. Cách xác định chuyển vị- nội lực trong cọc:

Để làm việc này ta sử dụng Bài toán thứ nhất trong [6] cũng dựa vào phương pháp Ma trận chuyển tiếp khi cọc chịu lực ngang được chuyển về sơ đồ dầm – nền. Và, muốn thế, trước tiên ta xác định vec tơ trạng thái ε_{0nh} tại đầu nhánh (đầu cọc) quy tụ vào nút i theo hệ tọa độ địa phương của nó, có dạng giống như (1):

$$\varepsilon_{0nh} = \{u_{y0nh} \quad u_{z0nh} \quad \varphi_{x0nh} \quad M_{x0nh} \quad Q_{y0nh} \quad N_{z0nh} \quad 1\} \quad (29)$$

a. Tìm các thành phần chuyển vị tại đầu nhánh

Từ lời giải ma trận chuyển tiếp trên tuyến chính, tại nút i ta đã biết được vec tơ trạng thái chuyển vị U_i :

$$U_i = \{u_{yi} \quad u_{zi} \quad \varphi_{xi}\} \quad (30)$$

Gọi U_{0nh} là vec tơ trạng thái chuyển vị đầu nhánh cần xác định, nếu chú ý đến (29), ta viết:

$$U_{0nh} = \{u_{y0nh} \quad u_{z0nh} \quad \varphi_{x0nh}\} \quad (31)$$

Vec tơ trạng thái U_i được chuyển đổi thành vec tơ trạng thái U_{0nh} nhờ biểu thức sau:

$$U_{0nhi} = H_{nh.U}^T U_i \quad (32)$$

b. Tìm các thành phần nội lực tại đầu nhánh:

Lại gọi ΔS_{oi} là vec tơ trạng thái nội lực đầu nhánh thì từ (29), ta viết:

$$\Delta S_{oi} = \{M_{x0nh} \quad Q_{y0nh} \quad N_{z0nh}\} \quad (33)$$

Theo nguyên lý cơ bản của phương pháp chuyển vị, ta có quan hệ dạng (13) như sau:

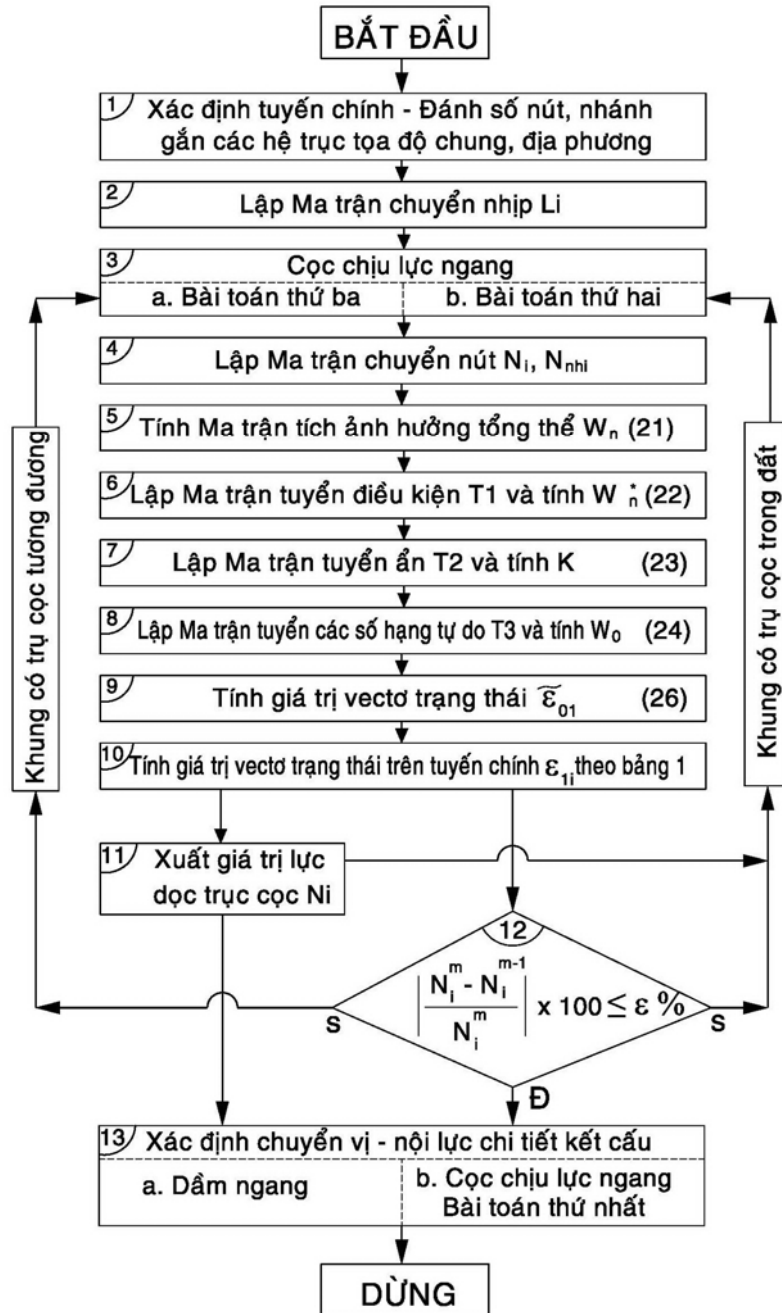
$$\Delta S_{oi} = \Delta S_{nhi} U_{0nhi} \quad (34)$$

Chú ý rằng ΔS_{nh} ma trận độ cứng chống chuyển vị đầu cọc theo (27) hoặc (28) phải đổi dấu các phần tử độ cứng của cọc chịu lực ngang.

Nhờ (32) và (34) mà vec tơ trạng thái ε_{0nh} theo (29), lúc này hoàn toàn xác định. Trạng thái chuyển vị – nội lực trong cọc chịu lực ngang có xét

ảnh hưởng của lực dọc trục theo giải thuật Ma trận chuyển tiếp sẽ thu được theo Bài toán thứ nhất như đã chỉ dẫn trong [6].

3.4. Trình tự tính toán:



Hình 5: Sơ đồ khối tính toán CTB trên nền cọc bằng Phương pháp ma trận chuyển tiếp

Các bước tính toán CTB trên nền cọc theo sơ đồ khung có trụ cọc tương đương cũng như khung có trụ cọc trong đất bằng phương pháp Ma trận chuyển tiếp được chỉ dẫn ở sơ đồ khối hình 5 với một số chú ý sau:

1. Vì giá trị lực dọc trục cọc i , N_i ảnh hưởng đến giá trị tham số đặc trưng chịu uốn của nó: chiều dài chịu uốn L_u (Bài toán thứ ba) và độ cứng chống chuyển vị ngang-xoay M_u , Q_u , M_φ , Q_φ (Bài toán thứ hai) nên khi giải phải dùng biện pháp lặp đơn.

2. Ở khối 3, với nội dung tính cọc chịu lực ngang xét ảnh hưởng của lực dọc trục cũng bằng thuật toán Ma trận chuyển tiếp có thể được thực hiện theo một trong hai cách sau đã nêu trong [6]:

Cách thứ nhất: chuẩn bị sẵn một chương trình tính cọc chịu lực ngang (Bài toán thứ hai và Bài toán thứ ba) có xét ảnh hưởng của lực dọc trục.

Cách thứ hai: Dựa trên kết quả tính theo cách thứ nhất, chuẩn bị sẵn các biểu thức toán học mô tả quan hệ giữa các tham số đặc trưng chịu uốn với lực dọc trục.

3. Khối 11 cho ta lực dọc trục với cọc như là một bộ phận kết cấu chịu uốn ngang, giống như kết quả tính toán lâu nay vẫn làm. Nếu xem đây là giá trị lực dọc gần đúng đầu tiên và chuyển vào khối 3 ta sẽ nhận được giá trị mới các đặc trưng chịu uốn. Và như thế trong các cọc sẽ xuất hiện một lực dọc trục mới. Điều kiện dừng tính được biểu thị ở khối 12: sai số tương đối giá trị lực dọc giữa hai lần tính liên tiếp đối với tất cả các cọc không quá một giá trị cho trước.

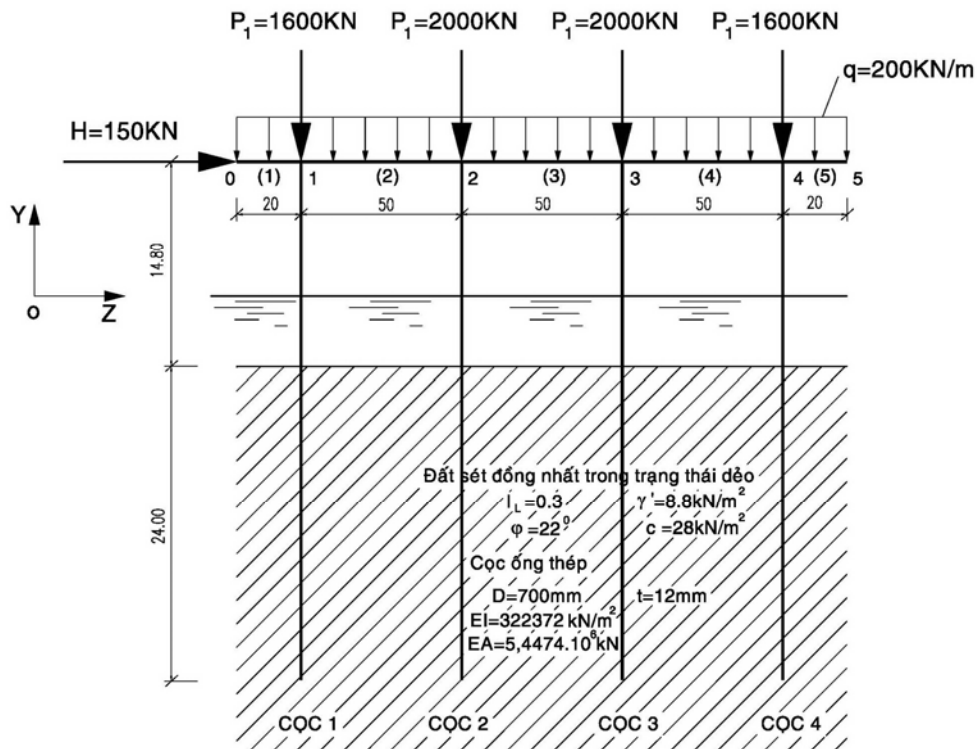
4. Ví dụ

4.1. Ví dụ 1:

Công trình bên trên nền cọc thẳng đứng. Sơ đồ khung phẳng có các trụ cọc tương đương với các số liệu xuất phát cho ở hình 6.

1. Trường hợp uốn ngang:

Một số ma trận chính và kết quả các phép tính ma trận chủ yếu để minh họa phương pháp tính sẽ được dẫn ra dưới đây một cách tóm tắt.



Hình 6: Sơ đồ kết cấu CTB của ví dụ 1

① Các ma trận chuyển nhíp L_i :

$$L_1 = L_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2.02E-07 & 1.35E-07 & 0 & -1.35E-05 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4.31E-08 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2.02E-07 & -2.02E-07 & 0 & 2.69E-05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -400 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = L_3 = L_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1.26E-06 & 2.10E-06 & 0 & -5.26E-04 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1.08E-07 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5.05E-07 & -1.26E-06 & 0 & 4.21E-04 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -2500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

② Các ma trận chuyển nút N_i :

$$N_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = N_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_2 = N_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

③ Các ma trận chuyển nút mở rộng N_{nh}

Có hai nhận xét:

- Bốn cọc này đều có N_{nh} giống nhau.
- Vì trên chiều dài chịu uốn không có tải ngoài tác dụng nên $\Delta R_{nh} = 0$

Với chiều dài chịu nén $L_N = 27,1m$; chiều dài chịu uốn $L_u = 18,24m$, ta tính được ma trận sau theo (27):

$$\Delta S_{nh} = \begin{pmatrix} 5813.79 & 0 & -70695.70 \\ -637.48 & 0 & 5813.79 \\ 0 & -200396.16 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_{nh,U} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad H_{nh,S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta S_{nh}^* = \begin{pmatrix} 0 & 5813.79 & -70695.70 \\ -200396.16 & 0 & 0 \\ 0 & -637.48 & 5813.79 \end{pmatrix}$$

$$N_{nh} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5813.79 & -70695.70 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -200396.16 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -637.48 & 5813.79 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

④ Xác định các thông ẩn số ban đầu:

Với ma trận chuyển điều kiện T_1 :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tính ma trận W_n^*

$$W_n^* = T_1 L_5 N_4 N_{nh,4} L_4 N_3 N_{nh,3} L_3 N_2 N_{nh,2} L_2 N_1 N_{nh,1} L_1 N_0$$

$$W_n^* = \begin{pmatrix} 3223987.86 & -67274.60 & 15926073.49 & -14.46 & -52.62 & 1.93E-03 & 35952.86 \\ 2501338.77 & -21366.73 & -3223987.86 & -2.11 & -15.95 & 1.97E-03 & 32213.05 \\ 21366.73 & -2620.54 & -67274.60 & 7.20E-03 & -6.17E-02 & 1.00E+00 & 436.26 \end{pmatrix}$$

Với ma trận tuyến ần T_2 :

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tính ma trận K:

$$K = \begin{pmatrix} 3223987.86 & -67274.60 & 15926073.49 \\ 2501338.77 & -21366.73 & -3223987.86 \\ 21366.73 & -2620.54 & -67274.60 \end{pmatrix}$$

Với ma trận tuyến số hạng tự do T_3 :

$$T_3 = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1\}$$

Tính ma trận-cột các số hạng tự do W_0 :

$$W_0 = \begin{pmatrix} 35952.86 \\ 32213.05 \\ 436.26 \end{pmatrix}$$

Cuối cùng, ta nhận được:

$$\bar{\varepsilon}_{01} = \begin{pmatrix} -0.011860 \\ 0.059634 \\ 0.000395 \end{pmatrix}$$

⑤ Các vec tơ trạng thái của dầm ngang dạng công thức bảng 1:

$$\varepsilon_{01} = \{-0.01186 \ 0.05963 \ 0.00040 \ 0 \ 0 \ 150 \ 1\}$$

$$\varepsilon_{11} = L_1 N_0 = \{-0.01266 \ 0.05963 \ 0.00042 \ -400 \ -400 \ 150 \ 1\}$$

$$\varepsilon_{02} = N_1 N_{nh.1} \varepsilon_{11} = \{-0.01266 \ 0.05963 \ 0.00042 \ -83.1807 \ 537.7006 \ 114.4430 \ 1\}$$

$$\varepsilon_{12} = L_2 \varepsilon_{02} = \{-0.01427 \ 0.05962 \ 0.00021 \ 437.3441 \ 398.0869 \ 77.6377 \ 1\}$$

$$\varepsilon_{03} = N_2 N_{nh.2} \varepsilon_{12} = \{-0.01427 \ 0.05962 \ 0.00021 \ 437.3441 \ 398.0869 \ 77.6377 \ 1\}$$

$$\varepsilon_{13} = L_3 \varepsilon_{03} = \{-1.44E-02 \ 5.96E-02 \ -9.66E-05 \ -72.2213 \ -601.9131 \ 77.6377 \ 1\}$$

$$\varepsilon_{04} = N_3 N_{nh.3} \varepsilon_{13} = \{-1.44E-02 \ 5.96E-02 \ -9.66E-05 \ 281.1503 \ 291.8335 \ 39.0780 \ 1\}$$

$$\varepsilon_{14} = L_4 \varepsilon_{04} = \{-1.35E-02 \ 5.96E-02 \ -1.86E-04 \ -759.6821 \ -708.1665 \ 39.0780 \ 1\}$$

$$\varepsilon_{05} = N_4 N_{nh.4} \varepsilon_{14} = \{-1.35E-02 \ 5.96E-02 \ -1.86E-04 \ -400 \ 400 \ -2.13E-14 \ 1\}$$

$$\varepsilon_{15} = L_5 \varepsilon_{05} = \{-1.32E-02 \ 5.96E-02 \ -1.59E-04 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1\}$$

⑥ Xác định chuyên vị - nội lực đầu cọc:

Do khuôn khổ hạn chế, chỉ trình bày cách tìm nội lực đầu cọc 1; các cọc còn lại cũng làm tương tự.

Từ vec tơ trạng thái ε_{11} ta có:

$$U_1 = \{-0.01266 \quad 0.05963 \quad 0.0042\}$$

Theo (16) ta tìm được:

$$H_{nh.U.1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vec tơ trạng thái nội lực đầu cọc 1: theo (34) có chú ý đến (32):

$$\Delta S_{01} = \begin{bmatrix} -316.819 \\ 35.557 \\ -2537.7006 \end{bmatrix}$$

2. Một số kết quả tính toán có xét ảnh hưởng lực dọc trục trong cọc:

Bảng 2: Sự biến đổi của L_u (cm) và N (kN) trong quá trình lặn

		Cọc 1	Cọc 2	Cọc 3	Cọc 4
VL1	L_u	18.24	18.24	18.24	18.24
	N	2537.7006	2860.3864	2893.7466	2708.1665
VL2	L_u	20.1019	20.4017	20.4337	20.2580
	N	2527.2346	2859.5138	2896.0298	2717.2218
VL3	L_u	20.0925	20.4008	20.4359	20.2664
	N	2527.1898	2859.5591	2896.0276	2717.1785
VL4	L_u	20.0924	20.4009	20.4360	20.2664
	N	2527.1894	2859.5595	2896.0726	2717.178
VL5	L_u	20.0924	20.40089	20.4359	20.2663
	N	2527.189	2859.5595	2896.073	2717.178

Bảng 3: Sự biến đổi chuyển vị nút của kết cấu giữa hai vòng lặp:

Nút	Nút 1			Nút 2			Nút 3			Nút 4		
	Đ	N	X	Đ	N	X	Đ	N	X	Đ	N	X
VL1	-1.266	5.963	4.221	-1.427	5.962	2.061	-1.444	5.961	-0.966	-1.351	5.960	-1.862
VL5	-1.26611	8.2071	4.4	1.42695	8.2059	2.12	-1.44517	8.2051	-0.919	-1.3559	8.2047	-1.7
Sai khác (%)	0.4	37.64	3.96	0.03	37.65	2.99	0.08	37.65	-5.1	0.3	37.66	-7.1

Ghi chú: Chuyển vị thẳng đứng, Đ (10^{-2} m).
 Chuyển vị nằm ngang, N (10^{-2} m).
 Chuyển vị xoay, X (10^{-4} rad).

Bảng 4: Sự biến đổi của nội lực tại nút cuối thanh giữa hai vòng lặp

Nút	Nút 1			Nút 2			Nút 3			Nút 4		
	M	Q	N	M	Q	N	M	Q	N	M	Q	N
VL1	-400	-400	150	105.322	-462.299	114.443	-72.221	-601.913	77.638	-759.682	-708.166	39.078
VL5	-400	-400	150	100.959	-472.810	112.965	-97.361	-613.251	76.565	-797.441	-717.179	38.941
Sai khác (%)	0	0	0	-4.14	2.27	-1.31	34.81	1.88	-1.40	4.97	1.27	-0.33

Ghi chú: Momen uốn, M (kNm).
 Lực cắt, Q (kN).

Bảng 5: Sự biến đổi nội lực đầu cọc giữa hai vòng lặp

Cọc	Cọc 1			Cọc 2			Cọc 3			Cọc 4		
	M	Q	N	M	Q	N	M	Q	N	M	Q	N
VL1	-316.819	35.557	-2537.70	-332.022	36.805	-2860.39	-353.372	38.56	-3893.75	-359.682	39.078	2708.17
VL5	-365.102	37.049	2527.19	-367.968	36.404	-2859.56	-385.662	37.59	-3896.07	-397.3	38.928	-2757.178
Sai khác (%)	15.2	4.2	0.4	10.8	-1.1	-0.03	9.1	-2.5	0	10.5	0.4	0.3

Ghi chú: xem bảng 4.

3. Bình luận – Nhận xét

- a. Sau năm vòng lặp thì lực dọc và do đó, chiều dài chịu uốn của tất cả các cọc đều hội tụ.

Do ảnh hưởng của lực dọc mà chiều dài chịu uốn tăng lên và mức độ gia tăng phụ thuộc vào giá trị lực dọc của chính cọc đó.

- b. Kết quả là chuyển vị ngang của CTB tăng gần 40% so với uốn ngang, còn momen nội lực đầu cọc tăng từ 10 - 15%.

4.2. Ví dụ 2:

Công trình bên trên nền cọc có góì cọc chéo-Sơ đồ khung có trụ cọc trong đất với số liệu của ví dụ hai trong [4]:

1. Một số kết quả chủ yếu được trình bày ở các bảng 6, 7 và 8.

Bảng 6: Sự biến đổi chuyển vị nút của kết cấu giữa hai vòng lặp.

Nút	Nút 1			Nút 2			Nút 3		
	Đ	N	X	Đ	N	X	Đ	N	X
Vòng lặp VL1	-1.267	0.605	2.77	-1.372	0.604	2.13	-1.387	0.602	-0.387
VL5	-1.27	0.62	2.78	-1.37	0.619	2.13	-1.40	0.617	-0.663
Sai khác (%)	0	2.5	0.4	0	2.5	0	0.6	2.5	71.0

Ghi chú: xem bảng 3.

Bảng 7: Sự biến đổi nội lực tại nút cuối thanh giữa hai vòng lặp.

Nút	Nút 1			Nút 2			Nút 3		
	M	Q	N	M	Q	N	M	Q	N
Vòng lặp VL1	-400	-400	150	171.346	-261.048	147.746	-473.465	-710.805	145.125
VL5	-400	-400	150	171.9	-261.2	148.59	-471.65	-710.73	146.91
Sai khác (%)	0	0	0	0.3	0	-3.6	-0.4	0	1.2

Ghi chú: xem bảng 4.

Bảng 8: Sự biến đổi nội lực đầu cọc giữa hai vòng lặp.

Cọc	Cọc 1			Cọc 2			Cọc 3			Cọc 4		
	M	Q	N	M	Q	N	M	Q	N	M	Q	N
VL1	-15.543	2.254	2538.953	-20.024	2.62	2750.246	-55.325	5.816	2349.659	-18.028	1.813	2917.446
VL5	-16.712	1.401	2538.798	-20.811	1.82	2750.474	-53.927	4.540	2342.672	-17.727	1.415	2924.378
Sai khác (%)	7.5	37.6	0	3.9	-35.8	0	-2.5	21.9	0	-1.7	-21.9	0.2

Ghi chú: xem bảng 4.

2. Bình luận-Nhận xét:

- a. Chuyển vị-nội lực trong CTB thu được ở đây khá phù hợp với kết quả lời giải Phương pháp phần tử hữu hạn trong [5].
- b. Góì cọc chéo đã làm cho chuyển vị ngang của kết cấu giảm nhỏ đáng kể và do vậy, ảnh hưởng của uốn dọc trong cọc đến sự làm việc của CTB không còn rõ rệt như đối với CTB trên nền cọc với các cọc thẳng đứng.

5. Kết luận:

- 5.1. Nhờ những chỉ dẫn về các phép toán ma trận trong cách sử dụng ma trận chuyển [1], lời giải Ma trận chuyển tiếp đối với các CTB trên nền cọc được đề xuất từ những năm tám mươi của thế kỷ trước, nay đã được hoàn thiện về nhiều mặt. Điều đó làm tăng thêm nhiều thể mạnh ở cách giải đã kiến nghị này.
- 5.2. Nếu xét về khía cạnh phản ánh sự tương tác giữa đất-cọc của CTB trong quá trình tính toán thì có thể xem lời giải Ma trận chuyển tiếp tương đồng với phần tử hữu hạn như ở [4] và [5] đã làm. Tuy nhiên, so sánh giữa chúng, ta dễ dàng nhận rõ, phương pháp Ma trận chuyển tiếp có hai điểm nổi trội cơ bản:
 1. Trong quá trình tính toán, cọc và bộ được xét riêng rẽ.
 2. Dù CTB có bao nhiêu cọc (nút) thì, đối với bài toán khung phẳng, số lượng ẩn vẫn không đổi và chỉ bằng ba.
- 5.3. Kết quả khảo sát ảnh hưởng uốn ngang-dọc của cọc đến trạng thái chuyển vị nội lực trong CTB trên nền cọc theo hai sơ đồ kết cấu cũng hoàn toàn giống như [4] và [5]: lực dọc trục cọc làm gia tăng đáng kể chuyển vị ngang kết cấu và nội lực trong cọc đối với CTB trên nền cọc thẳng đứng nhưng lại không nhạy đối với CTB trên nền cọc có gôl chéo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]- Lều Thọ Trình, Lều Mộc Lan:
Cách sử dụng ngôn ngữ ma trận trong lý thuyết hệ thanh. Nhà xuất bản Xây dựng, Hà Nội, 2007.
- [2]- Phan Dũng:
“Tính toán bộ cọc mềm có xét đến sự tương tác giữa nền đất và nền cọc”. Tạp chí Khoa học Kỹ thuật Giao thông Vận tải, No.1, 1982, Bộ Giao thông vận tải, Hà Nội, tr.11-14
- [3]- Phan Dũng:
Tính toán cọc và móng cọc trong xây dựng giao thông. Nhà xuất bản Giao thông vận tải, Hà Nội, 1987.
- [4]- Phan Dũng:
“Tính toán công trình bên trên nền cọc theo sơ đồ khung phẳng tương đương bằng phương pháp phần tử hữu hạn”. Tạp chí Khoa học Công nghệ Giao thông vận tải, No.2, 2008, trường Đại học Giao thông Vận tải TP. Hồ Chí Minh, tr.4-19.
- [5]- Phan Dũng:
“Tính toán công trình bên trên nền cọc theo sơ đồ khung phẳng có trụ cọc trong đất bằng phương pháp phần tử hữu hạn”. Tạp chí Khoa học Công nghệ Giao thông vận tải, No.2,2008, Trường Đại học Giao thông Vận tải TP. Hồ Chí Minh, tr.88-102.
- [6]- Phan Dũng:
“Tính toán cọc mềm chịu lực ngang có xét ảnh hưởng của lực dọc trục bằng phương pháp Ma trận chuyển tiếp”. Tạp chí Biển & Bờ No.1+2/2010, Hội Cảng-Đường thủy-Thềm lục địa Việt Nam, tr.38-55.
- [7] Phan Dũng:
“Cách tính công trình bên trên bộ cọc cao mềm bằng Phương pháp Ma trận độ cứng”. Tạp chí Biển & Bờ No.7+8/2009, Hội Cảng-Đường thủy-Thềm lục địa Việt Nam, tr.36-50.