TÍNH DẦM TRÊN NỀN BÁN KHÔNG GIAN ĐÀN HỒI BẰNG PHƯƠNG PHÁP NĂM MÔ MEN GẦN ĐÚNG

Ts. Phan Dũng

I. Đặt vấn đề

1.1 Dầm trên nền đàn hồi là một hệ bao gồm dầm đặt trực tiếp trên (hoặc có thể trong) nền đất khi chịu tác động bên ngoài thì hệ này cùng làm việc, nghĩa là dầm và đất làm việc đồng thời trong mối tương quan "nhân – quả".

Phân tích trạng thái chuyển vị - nội lực của một hệ như thế được hiểu là tính toán dầm trên nền đàn hồi.

1.2 Nền đàn hồi được xét ở đây là bán không gian (BKG) đàn hồi (được đặc trưng bởi mô đun đàn hồi E và hệ số poisson μ) hoặc BKG biến dạng đàn hồi tuyến tính (được đặc trưng bởi môđun tổng biến dạng E_0 và hệ số nở hông μ_0). Các trình bày tiếp sau sẽ chỉ nói về mô hình nền BKG thứ hai.

Trạng thái ứng suất – biến dạng của nền được chia thành hai bài tóan rất quen thuộc như môn cơ học đất; có thể tóm tắt như sau:

1. Bài toán Boussinesq:

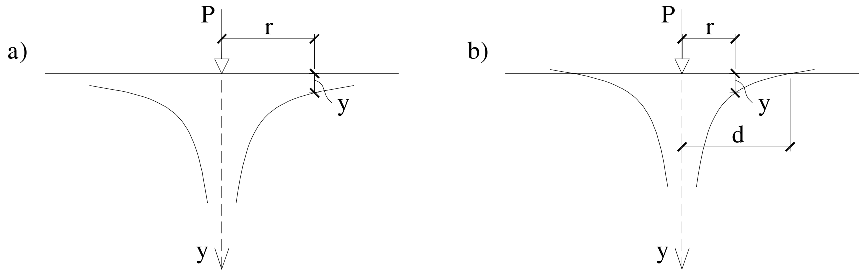
Nền BKG nằm trong trạng thái ứng suất biến dạng khối (H.1a), độ lún tuyệt đối y của một điểm nằm trên mặt nền cách lực tập trung P một khoảng r được xác định như sau:

$$y = \frac{1-\mu_0^2}{\pi E_0}\frac{P}{r} \tag{1}$$

2. Bài toán Flamant:

Nền BKG nằm trong trạng thái ứng suất – biến dạng phẳng (H.1b), độ lún tương đối y của một điểm nằm trên mặt nền cách lực tập trung P một khoảng r được tính bởi:

$$y = \frac{2P}{\pi E_0}\ln\frac{d}{r} \tag{2}$$



Hình 1: Mối quan hệ giữa độ lún và lực đối với nền BKG.

a. Bài toán Boussinesq;

b. Bài toán Flamant.

Sở dĩ gọi độ lún tương đối vì, ở bài toán này, y là hiệu độ lún giữa điểm tính với một điểm nào đó được chọn trên mặt nền, cách lực P một khoảng bằng d. Bài toán Flamant lại được phân thành hai trường hợp:

a- Trạng thái ứng suất phẳng , và

b- Trạng thái biến dạng phẳng.

3. Ghi chú: Các công thức (1) và (2) cho thấy:

① Khi r = 0 thì y = ∞. Để khắc phục điều đó, trong tính tóan thực hành, người ta tránh dùng lực tập trung P mà thay thế bằng một lực phân bố đều tương đương p trên một diện nào đó.

② Quan hệ giữa độ lún y với tải trọng p là một đường cong phức tạp và có thể biểu diễn dưới dạng chung bởi phương trình:

$$y = K(p) \tag{3}$$

1.3 Như đã biết, bài toán dầm trên nền đàn hồi theo bản chất cơ học nêu ở mục 1.1, được mô tả bằng hai phương trình sau:

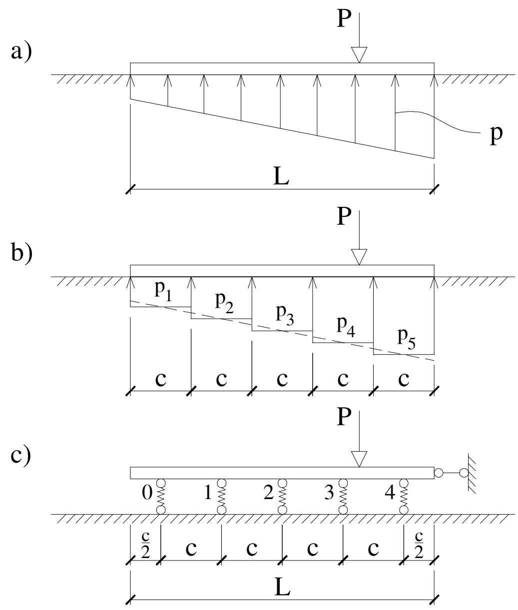
$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{p(x)}{EI}, \\ \text{và} \quad &y(x) = K[p(x)] \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Có rất nhiều lời giải khác nhau đối với hệ (4). Theo các sách giáo khoa và tài liệu chuyên khảo thực hành có được về vấn đề này, dựa vào cách “hành xử” đối với BKG, có thể chia thành hai nhóm:

1. Nhóm thứ nhất gồm các lời giải xem nền BKG tiếp liền với dầm là một môi trường liên tục, điển hình như các tác giả: Gorbunov-Poxador [3] Ximvulidi [4], [5]... Nếu biết được p(x) thì chuyển vị nội lực trong dầm dễ dàng xác định nhờ hệ (4) vì vậy mục tiêu là tìm giá trị và quy luật phân bố của phản lực nền. Người ta chọn p(x) là một hàm nào đó phụ thuộc vào các tham số ban đầu. Sau đó, từ hệ (4), nhờ phương trình thứ nhất tìm được độ võng của dầm y; còn phương trình thứ hai tính được độ lún của

nền W. Sử dụng các điều kiện cân bằng tĩnh và đồng nhất y với W để xác định các tham số ban đầu. Lời giải giải tích rất phức tạp nên các tác giả đã lập bảng để việc ứng dụng thực tế được dễ dàng. Chính vì vậy, một số tài liệu gọi đây là các phương pháp tra bảng.

2. Nhóm thứ hai, nền BKG liên tục được thay thế bởi một số hữu hạn gối đàn hồi tương đương. Khi đó, nền BKG tiếp liền với dầm trở thành môi trường không liên tục, điển hình và tiên phong cho hướng này phải nói đến Jemoskin. Thiết nghĩ sẽ bằng thừa khi nêu lại lập luận chặt chẽ, sáng sủa về việc xây dựng sơ đồ tính toán của tác giả này nên tốt hơn cả là mô tả kết quả tóm tắt trên hình 2. Theo đó, bài toán dầm trên BKG đàn hồi có số bậc tự do lớn vô hạn đã được quy về bài toán dầm liên tục nhiều nhịp trên các gối đàn hồi, là một kết cấu siêu tĩnh có số bậc tự do hữu hạn tùy chọn. Cũng như nhóm thứ nhất, vì mục tiêu là xác định phản lực nền nên Jemoskin chọn phương pháp hỗn hợp để giải bài toán.



Hình 2: Cách xác định hệ dầm tương đương của Jemoskin.

a. Dầm trên BKG đàn hồi với biểu đồ phản lực nền là một đường cong.

b. Dầm trên BKG đàn hồi với biểu đồ phản lực nền dạng bậc.

c. Kết cấu siêu tĩnh: dầm liên tục nhiều nhịp trên gối đàn hồi.

1.4 Phải nói rằng trong lĩnh vực tính kết cấu trên nền đàn hồi, đặc biệt là nền BKG, các nhà khoa học Xô Viết cũ đã có nhiều đóng góp lớn lao với nhiều công trình nghiên cứu "để đời". Nhờ đó mà bài toán kết cấu trên BKG ngày càng được ứng dụng rộng rãi vào thực tế thiết kế. Mặc dù vậy, trong một số lĩnh vực chuyên môn hẹp, ở đâu đó, ta vẫn có thể bắt gặp những bài toán dầm trên BKG hoặc giải theo các phương pháp đã biết thì rất khó khăn hoặc là chưa có lời giải. Trong [7] đã chứng tỏ được khả năng to lớn của Phương pháp Năm mô men gần đúng. Khả năng tuyệt vời của phương pháp này sẽ được vận dụng để tính dầm trên nền BKG theo sơ đồ hình 2c.

II. Dầm tựa tự do trên nền BKG đàn hồi:

2.1 Phương pháp Năm mô men gần đúng đối với dầm trên nền BKG đàn hồi:

Các sơ đồ tính toán cơ bản của Phương pháp Năm mô men gần đúng đối với một dầm trên gối đàn hồi biểu thị trên hình 3. Các hệ số của ẩn số và số hạng tự do trong trường hợp gối đàn hồi cục bộ theo (4) và (5) trong [7] được viết lại như sau:

$$\left[\delta_{ij}\right]_{CB} = \left[\delta_{ij}^{d}\right]_{CB} + \left[\delta_{ij}^{g}\right]_{CB} \tag{5}$$

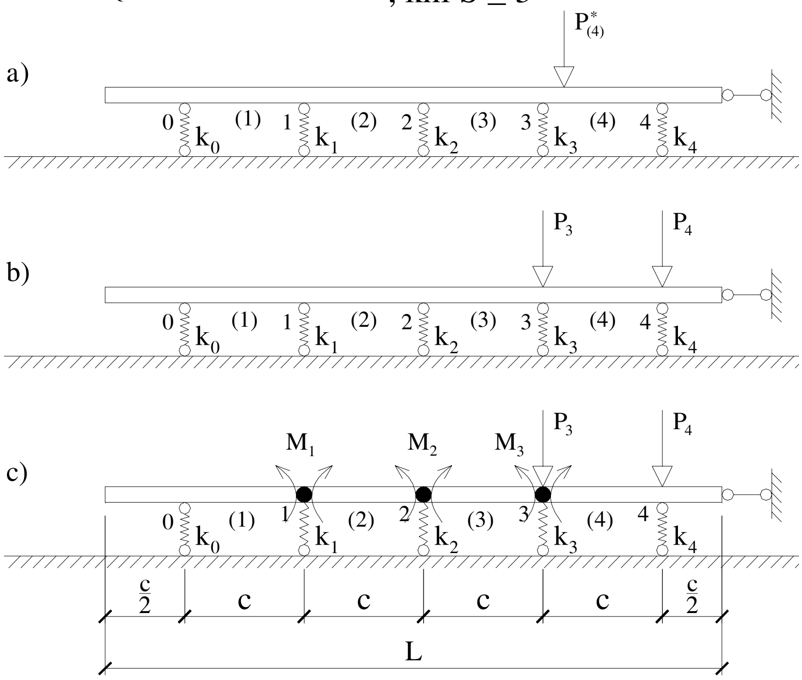
$$\left[\Delta_{ip}\right]_{CB} = \left[\Delta_{ip}^{g}\right]_{CB} \tag{6}$$

Nếu ký hiệu S là khoảng cách 2 điểm i và j và bằng:

$$S = \left|\ i - j\ \right| \tag{7}$$

Thì:

$$\left[\delta_{ij}^{d}\right]_{CB} = \begin{cases} 0 & ;\text{ khi } S = 2 \\ \dfrac{c}{6EI_i} & ;\text{ khi } S = 1 \\ \dfrac{c}{3EI_i} + \dfrac{c}{3EI_{i+1}} & ;\text{ khi } S = 0 \\ 0 & ;\text{ khi } S \geq 3 \end{cases} \tag{8}$$



<u>Hình 3</u>: Các sơ đồ tính toán của dầm theo Phương pháp Năm mô men gần đúng.

a. Dầm trên gối đàn hồi chịu tải ngoài ở nhịp 4 (giống H. 2c).

b. Dầm trên gối đàn hồi chịu tải ngoài quy đổi (phương pháp năm mô men gần đúng).

c. Hệ cơ bản của phương pháp lực.

Còn:

$$\left[\delta_{ij}^{g}\right]_{CB} = \begin{cases} \dfrac{k_{i-1}}{c^2} & ;\ \text{khi S} = 2 \\ -\dfrac{2k_{i-1}}{c^2} - \dfrac{2k_i}{c^2} & ;\ \text{khi S} = 1 \\ \dfrac{k_{i-1}}{c^2} + \dfrac{4k_i}{c^2} + \dfrac{k_{i+1}}{c^2} & ;\ \text{khi S} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Và:

$$\left[\Delta_{ip}\right]_{CB} = \frac{k_{i-1}}{c} R_{i-1} - \frac{2k_i}{c} R_i + \frac{k_{i+1}}{c} R_{i+1} \tag{10}$$

Đối với các gối đàn hồi từ nền BKG được gọi là gối đàn hồi biến dạng tổng quát, nhưng để cho gọn ta quy ước gọi là gối đàn hồi (nhằm phân biệt với gối đàn hồi cục bộ), thì (5) và (6) sẽ là:

$$\left[\delta_{ij}\right]_{ĐH} = \left[\delta_{ij}^{d}\right]_{ĐH} + \left[\delta_{ij}^{g}\right]_{ĐH} \tag{11}$$

$$\left[\Delta_{ip}\right]_{ĐH} = \left[\Delta_{ip}^{g}\right]_{ĐH} \tag{12}$$

So sánh (5), (6) với (11), (12) có thể nhận xét như sau:

① $\left[\delta_{ij}^{d}\right]_{CB} = \left[\delta_{ij}^{d}\right]_{ĐH}$ (13)

② Cần phải thiết lập công thức tính $\left[\delta_{ij}^{g}\right]_{ĐH}$ và $\left[\Delta_{ij}^{g}\right]_{ĐH}$

③ Về mặt cơ học thì $\left[\delta_{ij}^{g}\right]_{ĐH}$ và $\left[\Delta_{ij}^{g}\right]_{ĐH}$ là các góc xoay tương đối tại khớp i do lực P_j gây ra gồm các góc xoay thành phần, ký hiệu γ_{ij}. Từ (9) và (10) có thể xem góc xoay thành phần γ_{ij} như là tỷ số giữa độ lún y_{ij} tại i và chiều dài nhịp c, nghĩa là:

$$\gamma_{ij} = \frac{y_{ij}}{c} \tag{14}$$

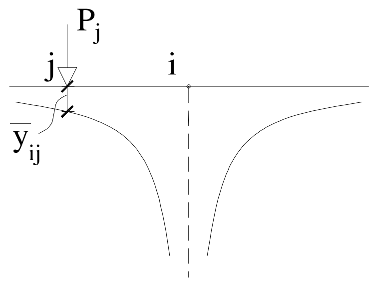
Như vậy, tiếp theo ta cần tìm y_{ij} là độ lún tại điểm i do lực P_j gây ra.

2.2 Độ lún của mặt nền BKG:

Độ lún của mặt nền BKG là vấn đề quan trọng đầu tiên, được trình bày chi tiết trong [2] và [6].

1. Khái niệm về độ lún:

Từ hình 1 có thể thấy rằng, đối với BKG đàn hồi – đồng nhất – đẳng hướng thì độ lún mặt nền không chỉ xảy ra ngay ở điểm chịu tải (như mô hình nền Winkler) mà còn ở các điểm nằm ngoài phạm vi đặt tải nữa. Nhờ tính chất đàn hồi – tuyến tính của BKG mà đường cong độ lún ở Hình 1 có thể được dùng như “Đường ảnh hưởng độ lún” (xem hình 4): để tìm độ lún tại điểm i do lực P_j gây ra, ta cần vẽ biểu đồ độ lún do lực $P_i = 1$ gây ra tại chính điểm i.



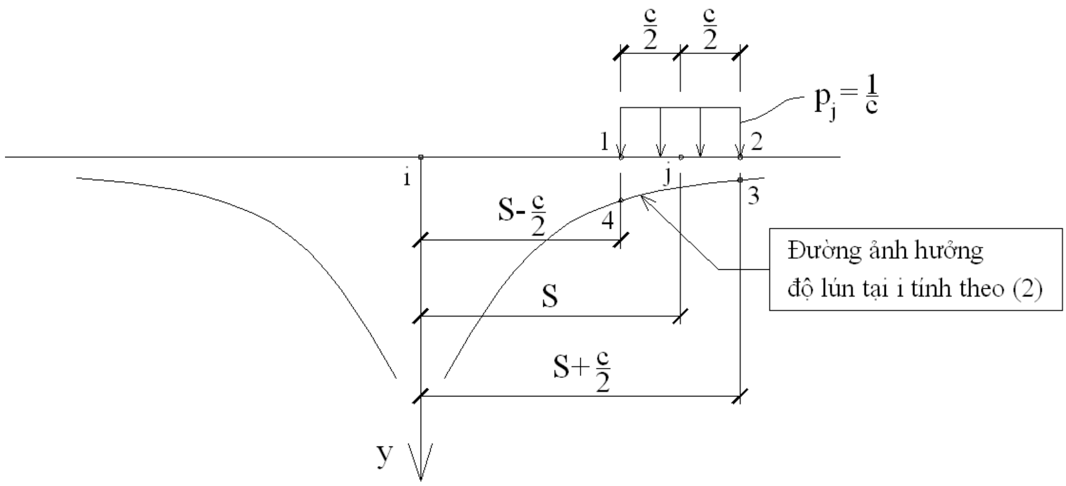
Hình 4: Đường ảnh hưởng độ lún tại điểm i

Độ lún tại điểm i do lực Pj gây ra là y_{ij} sẽ bằng tích của lực P_j với giá trị tung độ của biểu đồ lún (đường ảnh hưởng độ lún) ngay dưới vị trí của lực đó: $\overline{y_{ij}}$. Vậy:

$$y_{ij} = \overline{y_{ij}}\ P_j \tag{15}$$

Tiếp đến, ta nghiên cứu cách tính $\overline{y_{ij}}$.

2. Tung độ đường ảnh hưởng lún đối với bài toán phẳng



Hình 5: Sơ đồ tính độ lún $\overline{y_{ij}}$ của bài toán phẳng.

Đại lượng $\overline{y_{ij}}$ (tung độ Đường ảnh hưởng độ lún của mặt nền tại điểm i) chính là độ lún tại điểm i cách trung điểm của tải phân bố đều cục bộ $p_j = \dfrac{1}{c}$ một khoảng cách bằng S.

Như đã biết trong [1], khi chất tải phân bố trên đường ảnh hưởng thì “giá trị của đại lượng S (ở đây là độ lún) do tải phân bố đều gây ra bằng tích của cường độ tải trọng ấy với diện tích của phần đường ảnh hưởng nằm dưới đoạn tải trọng" (diện tích hình 1234 trên H. 5). Do đó, như [2], ta có:

$$\overline{y_{ij}} = \frac{1}{c}\int_{S-\frac{c}{2}}^{S+\frac{c}{2}} \frac{2}{\pi E_0}\ln\frac{d}{\zeta}d\zeta = fF_{ij} \tag{16}$$

Ở đây:

f = hệ số;

$$f = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi E_0 b}; \text{ với trạng thái ứng suất phẳng;} \\ \dfrac{1-\mu_0^2}{\pi E_0 b}; \text{ với trạng thái biến dạng phẳng.} \end{cases} \tag{17}$$

F_{ij} = hàm ảnh hưởng độ lún:

$$F_{ij} = -(2S+1)\ln(2S+1) + (2S-1)\ln(2S-1) \tag{18}$$

Nếu chú ý đến (7) thì F_{ij} = F_s và giá trị của nó cho trong bảng 1.

Bảng 1: Giá trị hàm ảnh hưởng độ lún F_s của BKG (bài toán phẳng) [6].

S	F_s	S	F_s	S	F_s	S	F_s
0	0.0000	6	-6,9675	11	-8,1814	16	-8,9312
1	-3,2958	7	-7,2764	12	-8,3555	17	-9,0524
2	-4,7514	8	-7,5439	13	-8,5157	18	-9,1668
3	-5,5742	9	-7,7797	14	-8,6640	19	-9,2749
4	-6,1537	10	-7,9906	15	-8,8020	20	-9,3776
5	-6,6018						

3. Tung độ Đường ảnh hưởng độ lún đối với bài toán không gian

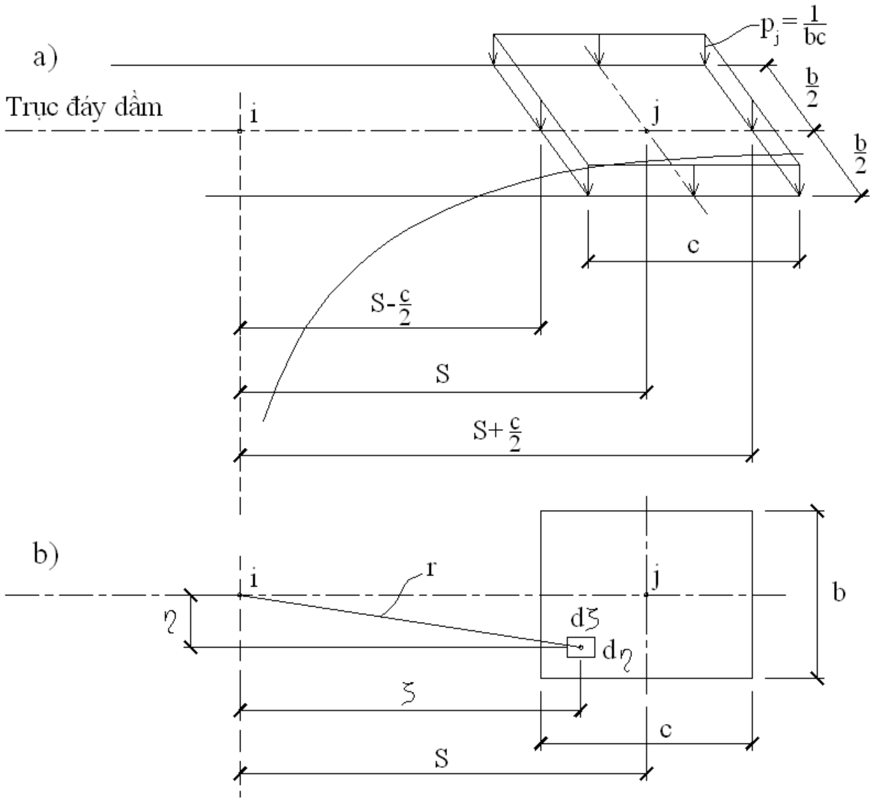
Vấn đề được đặt ra là tìm độ lún tại i cách tâm j của diện chịu tải b x c một khoảng bằng S. Cách làm cũng giống như ở bài toán phẳng với một số chú ý sau:

① Tải phân bố đều trên diện b x c có tâm là j bằng $p_j = \frac{1}{bc}$;

② Mặt ảnh hưởng của độ lún tại điểm i, có tung độ khung đổi tại một điểm bất kỳ trên cùng mặt cắt ngang dầm, được tính bởi (1) như hình 6a.

③ Các ký hiệu trong hình 6b giải thích cho cách tính độ lún tại điểm i, theo [2] sẽ bằng:

$$\overline{y_{ij}} = \int_{\zeta=S-\frac{c}{2}}^{\zeta=S+\frac{c}{2}} 2\int_{\eta=0}^{\eta=\frac{b}{2}} \frac{\left(1-\mu_0^2\right)}{bc\pi E_0 r}d\zeta d\eta = fF_{ij} \tag{19}$$



<u>Hình 6</u>: Sơ đồ tính độ lún $\overline{y_{ij}}$ bài toán không gian.

a. Hình phối cảnh Mặt ảnh hưởng độ lún tại i theo (19) và tải phân bố đều trên diện b x c tại j.

b. Mặt bằng diện tích chịu tải b x d tại j và diện chịu tải phân tố $d\zeta d\eta$ cách điểm i một khoảng r.

Trong đó:

f = hệ số;

$$f = \frac{1-\mu_0^2}{\pi E_0 c} \tag{20}$$

F_{ij} = hàm ảnh hưởng độ lún:

$$F_{ij} = \ln\frac{S+1}{S-1} + \frac{\beta}{2}\left[(2S+1)\ln\frac{2S+1+\beta}{2S+1-\beta} + (2S-1)\ln\frac{2S-1+\beta}{2S-1-\beta}\right] \tag{21}$$

$$\text{với } \beta = \frac{b}{2} \tag{22}$$

Cũng như thế, nếu chú ý đến (7) thì F_{ij} = F_s và giá trị của nó cho ở bảng 2.

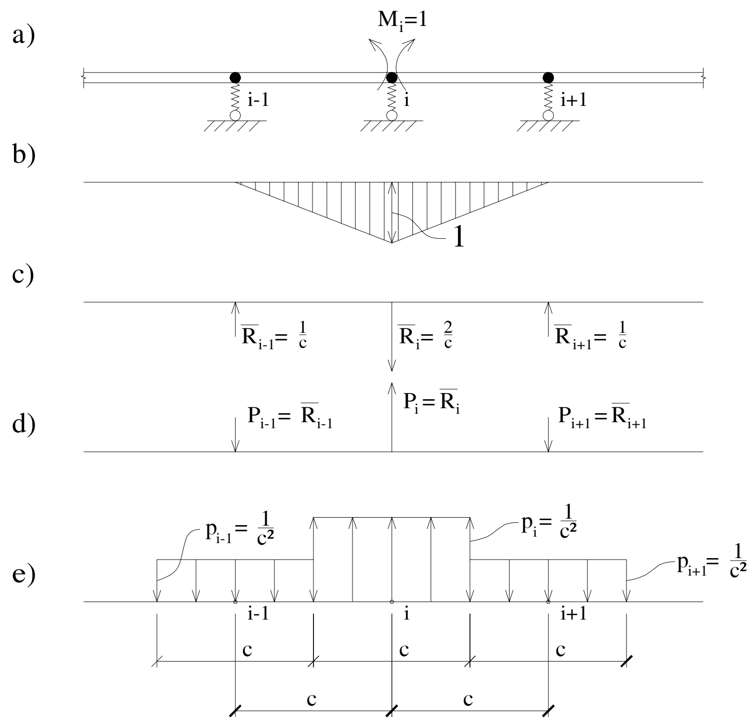
Bảng 2: Giá trị hàm ảnh hưởng độ lún F_s của BKG (bài toán không gian) [6].

S	Với b/c bằng					
	0,25	0,50	0,75	1,00	2,00	3,00
0	6,1962	4,8121	4,0456	3,5255	2,4061	1,8672
1	1,0940	1,0812	1,0618	1,0381	0,9295	0,8292
2	0,5105	0,5094	0,5076	0,5051	0,4849	0,4691
3	0,3364	0,3316	0,3356	0,3349	0,3303	0,3233
4	0,2513	0,2512	0,2509	0,2507	0,2487	0,2456
5	0,2006	0,2006	0,2005	0,2003	0,1993	0,1977
6	0,1670	0,1670	0,1669	0,1667	0,1663	0,1653
7	0,1431	0,1431	0,1430	0,1430	0,1426	0,1420
8	0,1252	0,1251	0,1251	0,1251	0,1248	0,1244
9	0,1112	0,1112	0,1112	0,1110	0,1110	0,1107
10	0,1001	0,1001	0,1001	0,1000	0,0999	0,0997
11	0,0910	0,0910	0,0910	0,0909	0,0909	0,0907
12	0,0834	0,0834	0,0834	0,0834	0,0833	0,0832
13	0,0770	0,0770	0,0770	0,0769	0,0769	0,068
14	0,0715	0,0715	0,0715	0,0714	0,0714	0,0713
15	0,0667	0,0667	0,0667	0,0667	0,0666	0,0666
16	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,0624
17	0,0588	0,0588	0,0588	0,0588	0,0588	0,0588
18	0,0556	0,0556	0,0556	0,0556	0,0556	0,0556
19	0,0526	0,0526	0,0526	0,0526	0,0526	0,0526
20	0,0500	0,0500	0,0500	0,0500	0,0500	0,0500

2.3 Công thức tính $\lfloor \delta_{ij}^{g} \rfloor_{ĐH}$:

Xét một phần hệ cơ bản của Phương pháp Năm mô men gần đúng chứa gối i (H. 7a), nhờ các sơ đồ: H. 7b, c và d ta xác định quy luật và giá trị áp lực tác dụng trên mặt nền BKG do $M_i = 1$ đặt vào hệ cơ bản (H. 7e). Đây chính là các lực gây ra $\lfloor \delta_{ij}^{g} \rfloor_{ĐH}$. Tuy vậy, trước khi xác định đại lượng này ta cần phải thực hiện một bước trung gian: thiết lập công thức tính góc xoay của dầm tại i do lực đơn vị $P_j = 1$ đặt cách i một khoảng $S = |i - j|$, ký hiệu $\overline{\theta}_{ij}$ theo sơ đồ biểu diễn trên hình 8. Dựa trên (14), ta có thể viết:

$$\overline{\theta}_{ij} = -\gamma_{[i,(i-1)],j} + \gamma_{[i,(i+1)],j} \quad (23)$$



Hình 7: Sơ đồ tính nội lực trong dầm và áp lực lên nền do $M_i = 1$ gây ra [6].

a. Một phần hệ cơ bản với $M_i = 1$;
b. Biểu đồ mô men trong hệ cơ bản do $M_i = 1$ gây ra;
c. Phản lực gối tựa trong hệ cơ bản do $M_i = 1$ gây ra;
d. Lực tại gối tực tác dụng lên nền BKG;
e. Áp lực phân bố đều tác dụng lên nền BKG.

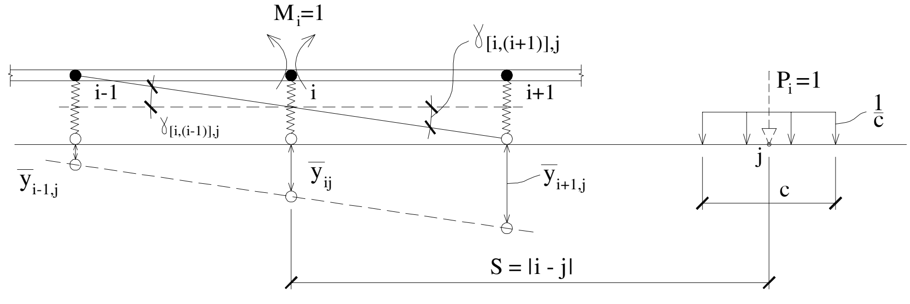
Nếu chú ý đến (15) thì (23) được viết lại:

$$\overline{\theta}_{ij} = \frac{1}{c}\left[-\left(\overline{y}_{ij} - \overline{y}_{i-1,j}\right) + \left(\overline{y}_{i+1,j} - \overline{y}_{ij}\right)\right]$$

$$\overline{\theta}_{ij} = \frac{1}{c}\left(\overline{y}_{i-1,j} - 2\overline{y}_{ij} + \overline{y}_{i+1,j}\right) \tag{24}$$

Thế (16) hoặc (19) vào (24) ta nhận được:

$$\overline{\theta}_{ij} = \frac{f}{c}\left(F_{i-1,j} - 2F_{ij} + F_{i+1,j}\right) \tag{25}$$



Hình 8: Sơ đồ tính $\overline{\theta}_{ij}$ [6].

Nhờ (25), theo biểu đồ áp lực lên nền BKG ở hình 7e ta thiết lập được công thức tính $\left[\delta_{ij}^{g}\right]_{ĐH}$ sau đây:

$$\left[\delta_{ij}^{g}\right]_{ĐH} = \frac{1}{c}\overline{\theta}_{i,j-1} + \frac{2}{c}\overline{\theta}_{i,j} + \frac{1}{c}\overline{\theta}_{i,j+1} \tag{26}$$

Trong đó:

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\theta}_{i,j-1} &= \frac{f}{c}\left(F_{i-1,j-1} - 2F_{i,j-1} + F_{i+1,j-1}\right)\\
\overline{\theta}_{i,j} &= \frac{f}{c}\left(F_{i-1,j} - 2F_{i,j} + F_{i+1,j}\right)\\
\overline{\theta}_{i,j+1} &= \frac{f}{c}\left(F_{i-1,j+1} - 2F_{i,j+1} + F_{i+1,j+1}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Thế (27) vào (26) ta nhận được:

$$\begin{aligned}
\left[\delta_{ij}^{g}\right]_{ĐH} = \frac{f}{c^2}\Big[&F_{(i-1)(j-1)} - 2F_{i(j-1)} + F_{(i+1)(j-1)} +\\
&- 2F_{(i-1),j} + 4F_{ij} - 2F_{(i+1),j} +\\
&+ F_{(i-1)(j+1)} - 2F_{i(j+1)} + F_{(i+1)(j+1)}\Big]
\end{aligned} \tag{28}$$

Đặt:

$$\begin{aligned}
\left[\overline{\delta}_{ij}^{g}\right]_{ĐH} = \ &F_{(i-1)(j-1)} - 2F_{i(j-1)} + F_{(i+1)(j-1)} +\\
&- 2F_{(i-1),j} + 4F_{ij} - 2F_{(i+1),j} +\\
&+ F_{(i-1)(j+1)} - 2F_{i(j+1)} + F_{(i+1)(j+1)}
\end{aligned} \tag{29}$$

và viết lại dạng gọn của (28):

$$\left[\delta_{ij}^{g}\right]_{ĐH} = \frac{f}{c^2}\left[\overline{\delta}_{ij}^{g}\right]_{ĐH} \tag{30}$$

Từ (30) sẽ thu được công thức $\left[\delta_{ij}^{g}\right]_{ĐH}$ theo S:

$$\left[\delta_{ij}^{g}\right]_{ĐH} = \left\{\begin{array}{l}
\dfrac{f}{c^2}\left(F_0 - 4F_1 + 6F_2 - 4F_3 + F_4\right)\ ;\text{khi } S = 2\\
\dfrac{f}{c^2}\left(-4F_0 + 7F_1 - 4F_2 + F_3\right)\ ;\text{khi } S = 1\\
\dfrac{f}{c^2}\left(6F_0 - 8F_1 + 2F_2\right)\ ;\text{khi } S = 0
\end{array}\right\} \tag{31}$$

Đối với bài toán phẳng, công thức (31) có dạng đơn giản:

$$\left[\delta_{ij}^{g}\right]_{ĐH} = \left\{\begin{array}{l}
+0{,}8179\,\dfrac{f}{c^2}\ \ ;\text{khi } S = 2\\
-9{,}6392\,\dfrac{f}{c^2}\ \ ;\text{khi } S = 1\\
+16{,}8636\,\dfrac{f}{c^2}\ \ ;\text{khi } S = 0
\end{array}\right\} \tag{31b}$$

còn khi S ≥ 3, thì:

$$\left[\delta_{ij}^{g}\right]_{ĐH} = \left[\delta_{ij}^{g}\right]_{ĐH} = \frac{f}{c^2}\left(F_{S-2} - 4F_{S-1} + 6F_S - 4F_{S+1} + F_{S+2}\right) \tag{32}$$

Để có thể ứng dụng Phương pháp Năm mô men gần đúng ta cần quy $\left[\delta_{ij}^{g}\right]_{ĐH}$ về $\left[\delta_{ij}^{g}\right]_{CB}$. Nếu thực hiện việc đồng nhất tương ứng theo S giữa hệ (9) với hệ (31), ta rút ra được các mối liên hệ sau giữa k_i và F_s:

$$\left.\begin{aligned} k_{i-1} &= f\left(F_0 - 4F_1 + 6F_2 - 4F_3 + F_4\right) \\ k_i &= f\left(F_0 + 0.5F_1 - 4F_2 + 3.5F_3 - F_4\right) \\ k_{i+1} &= f\left(F_0 - 6F_1 + 12F_2 - 10F_3 + 3F_4\right) \end{aligned}\right\} \tag{33a}$$

Đối với bài toán phẳng của BKG đàn hồi – đồng nhất, hệ (33a) có dạng đơn giản hơn nhiều:

$$\left.\begin{aligned} k_{i-1} &= 0,8179f \\ k_i &= 4,0017f \\ k_{i+1} &= 0,0389f \end{aligned}\right\} \tag{33b}$$

Như vậy khi tính dầm trên nền BKG bằng Phương pháp Năm mô men gần đúng, các hệ số của ẩn số vẫn dùng được công thức (8) và (9) nhưng giá trị độ cứng của gối tựa k trong (9) phải xác định theo hệ (33) tương ứng. Ngoài ra, do đặc tính của nền BKG cần phải sử dụng thêm hệ (32).

2.4 Công thức tính $\left[\Delta_{ip}^{g}\right]_{ĐH}$:

Từ những nguyên lý cơ bản của Phương pháp Năm mô men gần đúng, ta có những nhận xét sau:

① Tại vị trí gối tựa j chẳng hạn, quan hệ giữa tải trọng ngoài: P_j^*, phản lực gối tựa: R_j và áp lực lên mặt nền BKG: P_j như sau: $P_j^* = R_j = P_j$.

② Đối với gối tựa đàn hồi cục bộ, số hạng tự do viết cho gối i theo (10) chỉ chịu ảnh hưởng của hai gối i-1 và i+1.

③ Trong trường hợp nền BKG với gối tựa đàn hồi, số hạng tự do $\left[\Delta_{ip}^{g}\right]_{ĐH}$ chịu ảnh hưởng của tất cả các gối nằm về phía trái và phía phải của i.

Để thiết lập công thức tính $\left[\Delta_{ip}^{g}\right]_{ĐH}$ ta không làm theo cách ở mục trước mà dựa vào (25) xác định số hạng tự do thành phần $\left[\Delta_{ip}^{g}\right]_{ĐH}$ do lực P_j gây ra:

$$\left[\Delta_{ij}^{g}\right]_{ĐH} = \theta_{ij} = \overline{\theta}_{ij}P_j = \frac{f}{c}(F_{i-1,j} - 2F_{ij} + F_{1+1,j})P_j \tag{34}$$

Lúc này, giá trị của $\left[\Delta_{ip}^{g}\right]_{ĐH}$ sẽ bằng:

$$\left[\Delta_{ip}^{g}\right]_{ĐH} = \sum_{j=0}^{n+1}\left[\Delta_{ij}^{g}\right]_{ĐH} = \frac{f}{c}\sum_{j=0}^{n+1}\left(F_{i-1,j} - 2F_{ij} + F_{1+1,j}\right)P_j \qquad (35)$$

Công thức (35) sẽ được dùng thay cho (10) khi tính dầm trên nền BKG bằng Phương pháp Năm mô men gần đúng.

2.5 Ví dụ: Dầm liên tục – tựa tự do trên nền BKG đàn hồi.

Đầu bài:

Giải lại ví dụ IV-4, trang 116 [5] của Ximvulidi. Đó là bản đáy của một tường chắn bê tông cốt thép cao 4,0m (H. 9a) với số liệu: kích thước tiết diện ngang h x b = 0,2x1,0m; vật liệu bê tông: E_b = 2.107 kN/m^2 và μ_b = 0,3; đất nền: E_0 = 41000 kN/m^2 và μ_0 = 0,3.

Giải:

Đây là bài toán biến dạng phẳng, sẽ được giải Phương pháp Năm mô men gần đúng. Hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\begin{pmatrix}
\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \delta_{14} & \delta_{15} & \delta_{16} & \delta_{17} & \delta_{18} \\
\delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \delta_{24} & \delta_{25} & \delta_{26} & \delta_{27} & \delta_{28} \\
\delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \delta_{34} & \delta_{35} & \delta_{36} & \delta_{37} & \delta_{38} \\
\delta_{41} & \delta_{42} & \delta_{43} & \delta_{44} & \delta_{45} & \delta_{46} & \delta_{47} & \delta_{48} \\
\delta_{51} & \delta_{52} & \delta_{53} & \delta_{54} & \delta_{51} & \delta_{56} & \delta_{57} & \delta_{58} \\
\delta_{61} & \delta_{62} & \delta_{63} & \delta_{64} & \delta_{65} & \delta_{66} & \delta_{67} & \delta_{68} \\
\delta_{71} & \delta_{72} & \delta_{73} & \delta_{74} & \delta_{75} & \delta_{76} & \delta_{77} & \delta_{78} \\
\delta_{81} & \delta_{82} & \delta_{83} & \delta_{84} & \delta_{85} & \delta_{86} & \delta_{87} & \delta_{88}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_8 \end{pmatrix}
= -
\begin{pmatrix} \Delta_{1P} \\ \Delta_{2P} \\ \Delta_{3P} \\ \Delta_{4P} \\ \Delta_{5P} \\ \Delta_{6P} \\ \Delta_{7P} \\ \Delta_{8P} \end{pmatrix}$$

Nhờ (17b) ta tính hệ số f:

$$f = \frac{1 - 0.3^2}{\pi 41000\,x1} = 7{,}0649.10^{-6} \ (m/kN)$$

Giá trị hệ số k theo (33b):

k_{i-1} = 5,7784.10^{-6}

k_i = 2,8272.10^{-5}

k_{i+1} = 2,7482.10^{-7}

Các hệ số của ẩn số được tính bởi (5) là tổng của(8) và (9) và được:

$$\left[\delta_{ij}\right]_{ĐH} = \begin{cases} 9{,}2454.10^{-5} & ;\ \text{khi } S = 2 \\ -1{,}0865.10^{-3} & ;\ \text{khi } S = 1 \\ 1{,}9187.10^{-3} & ;\ \text{khi } S = 0 \end{cases}$$

Với $S \geq 3$ thì $\left\lfloor \delta_S^g \right\rfloor_{ĐH}$ được xác định nhờ (32):

$$\delta_3 = 3{,}1346.10^{-5};\ \delta_4 = 7{,}1554.10^{-6};\ \delta_5 = 2{,}5999.10^{-6};$$

$$\delta_6 = 1{,}1869.10^{-6};\ \delta_7 = 6{,}2172.10^{-7};$$

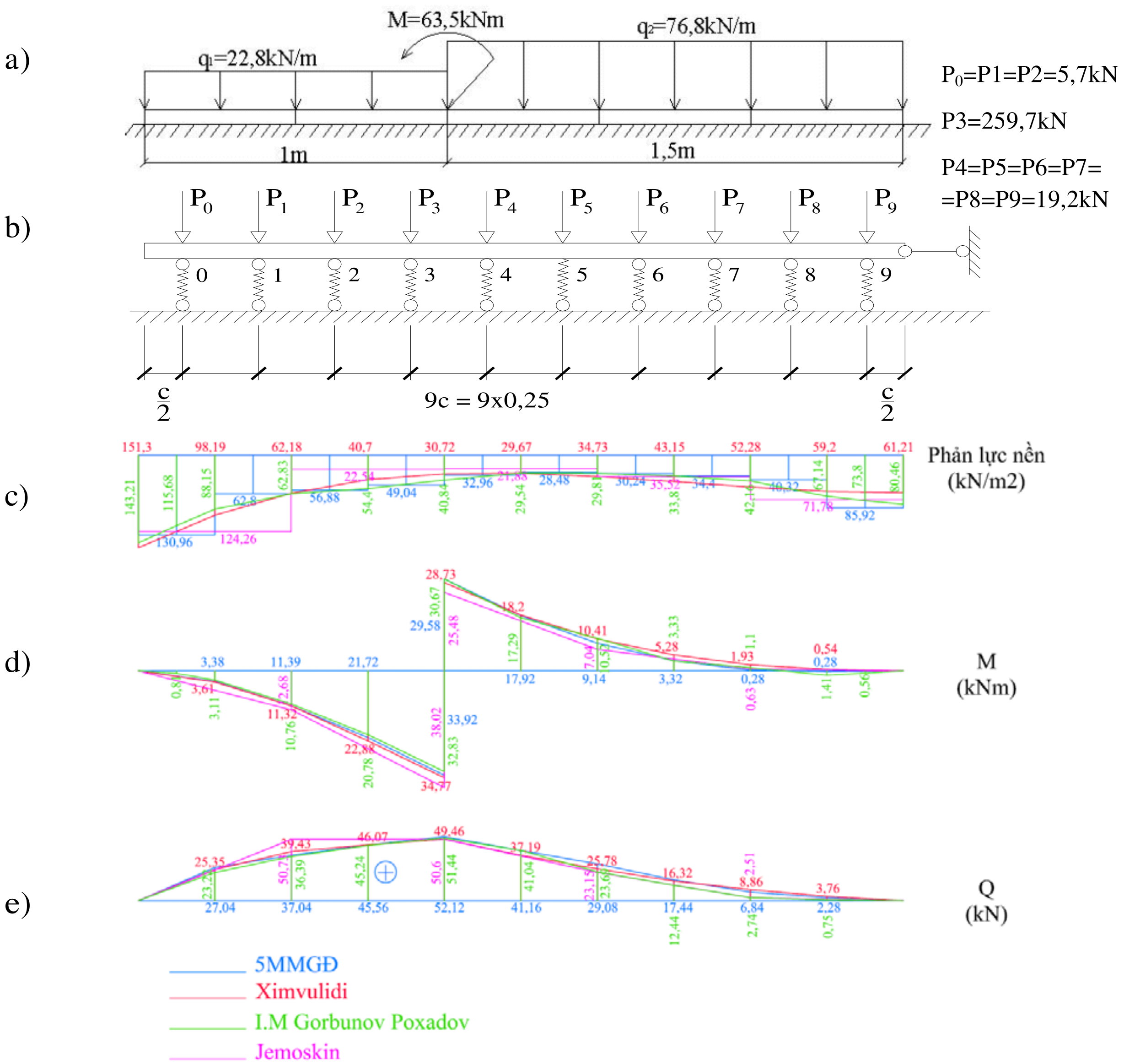
Các số hạng tự do tính theo (35):

$$\Delta_{1p} = 2{,}746.10^{-3};\quad \Delta_{2p} = 8{,}4959.10^{-3};$$

$$\Delta_{3p} = 0{,}0595;\quad \Delta_{4p} = 0{,}059;$$

$$\Delta_{5p} = -9{,}526.10^{-3};\quad \Delta_{6p} = -3{,}472.10^{-3};$$

$$\Delta_{7p} = -1{,}5153.10^{-3};\quad \Delta_{8p} = -1{,}349.10^{-3};$$



<u>Hình 9</u>: Sơ đồ và kết quả tính của ví dụ 1.

a. Sơ đồ dầm trên BKG;
b. Sơ đồ dầm tương đương trên các gối đàn hồi (phương pháp Năm mô men gần đúng);
c. Biểu đồ phản lực nền;
d. Biểu đồ mô men uốn;
e. Biểu đồ lực cắt.

Giải hệ phương trình chính tắc thu được các mô men gối (kNm):

$M_1 = 6{,}67$; $M_5 = 6{,}67$; $M_2 = 16{,}02$; $M_6 = -5{,}5$; $M_3 = 27{,}41$;

$M_7 = -1{,}14$; $M_4 = -23{,}06$; $M_8 = 0{,}57$;

Phản lực nền (kN/m^2):

$$p_0 = \frac{32{,}74}{0{,}25} = 130{,}96;\ p_1 = \frac{15{,}7}{0{,}25} = 62{,}8;\ p_2 = \frac{14{,}22}{0{,}25} = 56{,}88;\ p_3 = \frac{12{,}96}{0{,}25} = 49{,}04$$

$$p_4 = \frac{8{,}24}{0{,}25} = 32{,}96;\ p_5 = \frac{7{,}12}{0{,}25} = 28{,}48;\ p_6 = \frac{7{,}56}{0{,}25} = 30{,}24;\ p_7 = \frac{8{,}6}{0{,}25} = 34{,}4$$

$$p_8 = \frac{10{,}08}{0{,}25} = 40{,}32;\ p_9 = \frac{21{,}48}{0{,}25} = 85{,}92$$

Lực cắt (kN):

$Q_1 = 27{,}04$; $Q_2 = 37{,}04$; $Q_3 = 45{,}56$; $Q_4 = 52{,}12$; $Q_5 = 41{,}16$;

$Q_6 = 29{,}08$; $Q_7 = 17{,}44$; $Q_8 = 6{,}84$; $Q_9 = 2{,}28$

Hình 9 cho thấy kết quả của Phương pháp Năm mô men gần đúng rất phù hợp với các cách giải của Gorbunov-Poxadov, Ximvilidi và Jemoskin.

III. Kết luận

5.1 Triển khai ý tưởng đã nêu ở mục kết luận trong [7], bài báo này trình bày một cách hệ thống và cơ bản cách ứng dụng phương pháp Năm mô men gần đúng (vốn dĩ từ trước đến nay có thế mạnh tuyệt đối khi giải các bài toán dầm trên gối (nền) đàn hồi cục bộ) vào việc tính toán dầm trên nền BKG đàn hồi – đồng nhất. Vấn đề chính ở đây là đã tìm được mối quan hệ giữa các hệ số độ cứng đàn hồi cục bộ k_i trong phương pháp phương trình năm mô men với các hàm ảnh hưởng độ lún $F_{ij} = F_s$ của nền BKG đàn hồi. Trên cơ sở đó mà thiết lập được hàng loạt các công thức cần thiết để giải các bài toán đặt ra.

5.2 Dầm (tựa tự do) trên nền BKG đàn hồi chịu các tải trọng ngoài khác nhau là bài toán cơ bản đã được nghiên cứu đầu tiên. So sánh với kết quả các phương pháp Gorbunov – Pôxadôv, Ximvulidi và Jemochkin qua nhiều ví dụ từ đơn giản đến phức tạp cho thấy lời giải của phương pháp Năm mô men gần đúng khá hợp lý và đủ độ tin cậy cần thiết cho công tác thiết kế.

5.3 Chỉ với các bảng hàm ảnh hưởng độ lún F_{ij} của nền BKG, bằng phương pháp lực trong cơ học kết cấu ta có thể giải được một số bài tóan phức tạp về dầm trên nền BKG. Có thể nói, đây là thế mạnh của phương pháp kiến nghị.

Phương pháp này còn có thể cho phép xét đến điều kiện làm việc khác nhau của nền (không gian hoặc phẳng) và đặc biệt nền là lớp đàn hồi đồng nhất. Cần nói thêm rằng nhiều nghiên cứu đã khẳng định mô hình lớp đàn hồi phù hợp hơn với thực tế làm việc của nền đất so với mô hình BKG.

Xây dựng lời giải của phương pháp Năm mô men gần đúng đối với các điều kiện liên khác nhau ở đầu dầm, dầm có khớp, áp dụng mô hình nền một phần tư mặt phẳng đàn hồi… là một sô hướng nghiên cứu hoàn thiện tiếp sau.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Lều Thọ Trình:
Cơ học kết cấu
Tập I và II
Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1986.

[2]. Gs B. N. Jêmoskin, Gs A. P. Xinhitxưn:
Các phương pháp thực hành tính dầm và bản móng trên nền đàn hồi
Hồ Anh Tuấn – Hồ Quang Diệu dịch
Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 1971.

[3]. M. N. Gorbunov – Pôxadôv, T. A. Malicôva, V. I. Xôlômin:
Tính toán kết cấu trên nền đàn hồi
Tái bản lần thứ III có sửa chữavà bổ sung
Nhà xuất bản Xây dựng, Maxcơva, 1984 (tiếng Nga).

[4]. I. A. Ximvulidi:
Dầm nối ghép trên nền đàn hồi
Nhà xuất bản Quốc gia "Trường Cao đẳng" Maxcơva, 1961 (tiếng Nga).

[5]. I. A. Ximvulidi:
Tính toán kết cấu công trình trên nền đàn hồi
Tái bản lần thứ IV có sửa chữavà bổ sung
Nhà xuất bản Quốc gia "Trường Cao đẳng" Maxcơva, 1978 (tiếng Nga).

[6]. V. K. Shtenchel (chủ biên):
Công trình nâng tàu
Nhà xuất bản "Đóng tàu", Lêningrad,1978 (tiếng Nga).

[7]. Phan Dũng:
"Phương pháp Năm mô men – Phương pháp Năm mô men gần đúng và ứng dụng để tính dầm trên gối đàn hồi cục bộ". Tạp chí Khoa học Công nghệ Giao thông Vận tải No. 1, 2009, trường Đại học Giao thông Vận tải Tp. HCM, tr. 35–55.